

PL ISSN 0071-674X

POLSKA AKADEMIA NAUK — ODDZIAŁ W KRAKOWIE  
KOMISJA NAUK EKONOMICZNYCH I STATYSTYKI  
KRAKOWSKA AKADEMIA  
IM. ANDRZEJA FRYCZA MODRZEWSKIEGO

---

# **folia oeconomica cracoviensia**

Vol. LIII

2012

ODZIAŁU POLSKIEJ AKADEMII NAUK  
KRAKÓW

AKADEMIA NAUK — ODDZIAŁ W KRAKOWIE  
KOMISJA NAUK EKONOMICZNYCH I STATYSTYKI  
KRAKOWSKA AKADEMIA  
IM. ANDRZEJA FRYCZA MODRZEWSKIEGO

# FOLIA OECONOMICA CRACOVIENSIA

Vol. LIII  
2012

WYDAWNICTWO ODDZIAŁU POLSKIEJ AKADEMII NAUK  
KRAKÓW

REDAKTOR

prof. dr hab. Andrzej Iwasiewicz

KOMITET REDAKCYJNY

prof. dr hab. Anna Czubala

prof. dr hab. Henryk Gurgul

prof. dr hab. Jacek Osiewalski — Sekretarz Naukowy Komisji Nauk Ekonomicznych  
i Statystyki Oddziału PAN w Krakowie i sekretarz naukowy Komitetu Redakcyjnego

Adres Redakcji

31-018 Kraków, ul. św. Jana 28

Wydanie publikacji finansowane przez

Polską Akademię Nauk

oraz Krakowską Akademię im. Andrzeja Frycza Modrzewskiego

Redaktor tomu

Natalia Gackowska

© *Copyright by Autorzy, Polska Akademia Nauk Oddział w Krakowie*  
*Kraków 2012*

ISSN 0071-674X



Realizacja wydawnicza: PAN Warszawska Drukarnia Naukowa  
Skład i druk: PAN Warszawska Drukarnia Naukowa  
ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa  
tel./fax 22 628-76-14  
e-mail: wdnpan@wdnpan.pl  
www.wdnpan.pl

## SPIS TREŚCI

Jerzy Marzec, Jacek Osiewalski: Dwuwymiarowy model typu ZIP-CP w łącznej analizie zmiennych licznikowych .....	5
Mateusz Pipień: <i>Orthogonal transformation of coordinates in copula M-GARCH models — Bayesian analysis for WIG20 spot and futures returns</i> .....	21
Artur Prędko: <i>Podejście statystyczne w metodzie DEA na przykładzie jednoproduktowego modelu Bankera</i> .....	41
Renata Wróbel-Rotter: <i>Wybrane zagadnienia współczesnego modelowania strukturalnego, część I: Estymowane modele równowagi ogólnej w zarysie</i> .....	59
Renata Wróbel-Rotter: <i>Wybrane zagadnienia współczesnego modelowania strukturalnego, część II: Wnioskowanie w estymowanych modelach równowagi ogólnej</i> .....	85

## DWUWYMIAROWY MODEL TYPU ZIP-CP W ŁĄCZNEJ ANALIZIE ZMIENNYCH LICZNIKOWYCH

JERZY MARZEC

Katedra Ekonometrii i Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie  
*e-mail: marzecj@uek.krakow.pl*

JACEK OSIEWALSKI

Katedra Ekonometrii i Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie  
*e-mail: eosiewa@cyf-kr.edu.pl*

### ABSTRACT

J. Marzec, J. Osiewalski. *Bivariate ZIP-CP type model in the joint analysis of count variables*. Folia Oeconomica Cracoviensia 2012, 53: 5–20.

In the paper a generalization of the Berkhout and Plug (2004) bivariate Poisson regression model is proposed; in the Berkhout and Plug model one of the variables has the marginal Poisson distribution, while the other follows the conditional Poisson distribution. In the new model the marginal distribution is of the ZIP type and has the same parameterization as the hurdle model. Bayesian estimation of the model and the formal Bayesian comparison of its two alternative specifications are presented. The empirical example concerns joint modelling of the number of cash payments and bank card payments in Poland as well as inference on their correlation.

### STRESZCZENIE

W pracy zaproponowano uogólnienie modelu dwuwymiarowej regresji poissonowskiej, który wprowadzili Berkhout i Plug (2004), przyjmujący brzegowy rozkład Poissona dla jednej zmiennej i warunkowy rozkład Poissona dla drugiej. W nowym modelu rozkład brzegowy jest typu ZIP i ma taką parametryzację jak w modelu płótkowym. Przedstawiono bayesowską estymację tego modelu i formalne bayesowskie porównanie dwóch alternatywnych jego specyfikacji. Przykład empiryczny dotyczy łącznego modelowania i wnioskowania o korelacji między liczbą płatności kartą i gotówką w Polsce.

### KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

bivariate Poisson regression model, zero inflated Poisson model, bank card and cash payments

dwuwymiarowe modele regresji Poissona, model Poissona z nadwyżką zer,  
płatności kartą płatniczą i gotówką.

## 1. WPROWADZENIE

Regresja poissonowska jest podstawowym modelem analizy zmiennych licznikowych (tj. o wartościach całkowitych nieujemnych). Istnieją jej dwuwymiarowe uogólnienia; niektóre nakładają ograniczenia na korelację między zmiennymi, inne prowadzą do komplikacji natury statystyczno-numerycznej; zob. np. Kocherlakota i Kocherlakota (1992), Winkelman (2008). Na tym tle obiecujący jest model, który zaproponowali Berkhout i Plug (2004) przyjmując brzegowy rozkład Poissona dla jednej zmiennej oraz warunkowy rozkład Poissona dla drugiej (przy ustalonej pierwszej). Model P-CP (*Poisson — conditional Poisson*) jest łatwy w estymacji i dopuszcza korelację różnego znaku (dodatnią albo ujemną), ale znak ten zależy od znaku jednego parametru, a nie od zmiennych objaśniających; zob. także Marzec (2012). Model P-CP został użyty w Polsce do badania zależności między liczbą transakcji dokonywanych gotówką i liczbą transakcji dokonywanych kartą bankową (zob. Polasik, Marzec, Fiszedler, Górka (2012)); wbrew intuicji korelacja między nimi okazała się dodatnia, co skłania do ponowienia badań, ale po rozszerzeniu ograniczonej specyfikacji Berkhouta i Pluga.

Modele regresji dla skokowej zmiennej objaśnianej z nadmierną liczbą zer zostały spopularyzowane przede wszystkim przez artykuł Lamberta (1992). Cameron i Trivedi (1998, 2005) oraz Winkelman (2008) przedstawiają ekonometryczne modele danych licznikowych z przykładami ich zastosowań w ekonomii. W pracy rozważamy uogólnienie modelu P-CP, polegające na zastąpieniu brzegowego rozkładu Poissona pierwszej z dwóch zmiennych rozkładem typu ZIP (*zero inflated Poisson*), przy pozostawieniu warunkowego rozkładu Poissona drugiej zmiennej. Rozkład typu ZIP może mieć uzasadnienie w wielu sytuacjach praktycznych, gdyż bywa tak, że zerowa wartość zmiennej obserwowanej jest jakościowo odmienna od innych wartości. Proponowana w tej pracy parametryzacja odpowiada tzw. modelowi płotkowemu (ang. *hurdle model*). Osiewalski (2012) wprowadził skokowy rozkład dwuwymiarowy, nazwany ZIP-CP (*ZIP — conditional Poisson*) i podał jego momenty. Model dwuwymiarowej regresji poissonowskiej, oparty na rozkładzie ZIP-CP, prowadzi do znaku kowariancji zależnego od wartości zmiennych objaśniających. Głównym celem pracy jest omówienie estymacji i empirycznego wykorzystania tego modelu statystycznego, nazwanego też ZIP-CP (tak, jak leżący u jego podstaw typ rozkładu).

W następnej części pracy przedstawiamy zwięźle rozkłady P-CP i ZIP-CP, skupiając uwagę na momentach rzędu 1 i 2 oraz współczynniku korelacji. W trzeciej omawiamy model statystyczny typu ZIP-CP i jego ujęcie bayesowskie, zaś w czwartej prezentujemy przykład empiryczny.

## 2. ROZKŁADY P-CP I ZIP-CP ORAZ ZWIĄZEK MIĘDZY ICH MOMENTAMI

Rozważamy łączny rozkład prawdopodobieństwa dwóch zmiennych losowych  $(Y_1, Y_2)$  — przyjmujących wartości całkowite nieujemne — i przedstawiamy go następująco:

$$\Pr\{Y_1 = i, Y_2 = j\} = \Pr\{Y_1 = i\} \Pr\{Y_2 = j \mid Y_1 = i\} = g(i) h(j, i), \quad (i, j \in N \cup \{0\}). \quad (1)$$

Jeśli rozkład brzegowy zmiennej  $Y_1$  jest rozkładem Poissona o wartości oczekiwanej i wariancji  $\lambda_1$ , a rozkład warunkowy  $Y_2$  przy ustalonej wartości zmiennej  $Y_1$  jest rozkładem Poissona o wartości oczekiwanej i wariancji  $\lambda_2 \exp(\alpha Y_1)$ , czyli

$$g(i) = \exp(-\lambda_1) (\lambda_1)^i / i!, \quad h(j, i) = \exp[-\lambda_2 \exp(\alpha i)] (\lambda_2 \exp(\alpha i))^j / j!, \quad (2)$$

to mamy rozkład dwuwymiarowy P-CP (*Poisson — conditional Poisson*), który zaproponowali Berkhout i Plug (2004) i uzyskali dla niego wyniki m.in. w postaci następujących momentów:

$$E(Y_2) = \lambda_2 \exp[\lambda_1 (e^\alpha - 1)], \quad (3)$$

$$E[(Y_2)^2] = E(Y_2) + [E(Y_2)]^2 \exp[\lambda_1 (e^\alpha - 1)^2], \quad (4)$$

$$\text{Var}(Y_2) = E(Y_2) + [E(Y_2)]^2 \{\exp[\lambda_1 (e^\alpha - 1)^2] - 1\}, \quad (5)$$

$$E(Y_1 Y_2) = \lambda_1 e^\alpha E(Y_2). \quad (6)$$

Jeśli  $\alpha \neq 0$ , to bezwarunkowa wariancja (5) zmiennej  $Y_2$  jest większa od wartości oczekiwanej (3). Zależność między obu zmiennymi sprawia, że brzegowy rozkład zmiennej  $Y_2$  odpowiada empirycznie częstej sytuacji zwiększonej wariancji danych licznikowych. Brzegowy rozkład zmiennej  $Y_1$ , czyli rozkład Poissona, nie ma tej właściwości. Jest to pierwszy powód uogólnienia dwuwymiarowego rozkładu P-CP przez wprowadzenie rozkładu ZIP na miejsce brzegowego rozkładu Poissona. Należy też zauważyć, że znak kowariancji między  $Y_1$  i  $Y_2$ , czyli znak wyrażenia

$$\text{Cov}(Y_1, Y_2) = E(Y_1 Y_2) - E(Y_1)E(Y_2) = \lambda_1 (e^\alpha - 1)E(Y_2), \quad (7)$$

zależy jedynie od znaku stałej rzeczywistej  $\alpha$ , a nie od wielkości  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , parametryzowanych głębiej (uzależnianych od zmiennych objaśniających) w statystycznych zastosowaniach tego modelu probabilistycznego. W tej części krótko przedstawimy uogólnienie, które wprowadził Osiewalski (2012), dopuszczające

związek znaku kowariancji i wielkości  $\lambda_1$ , co w analizach statystycznych stwarza możliwość uzmiennienia tego znaku, w zależności od wartości zmiennych objaśniających poziom  $\lambda_1$ .

Obecnie rozważamy inny, ogólniejszy niż (1) przypadek, w którym łączny rozkład prawdopodobieństwa  $\Pr^* \{Y_1 = i, Y_2 = j\}$  zmiennych  $(Y_1, Y_2)$  o wartościach nieujemnych  $(i, j \in N \cup \{0\})$  jest określony przez ten sam warunkowy rozkład  $Y_2$  przy ustalonym  $Y_1$ :

$$\Pr^* \{Y_2 = j \mid Y_1 = i\} = h(j, i) = \Pr \{Y_2 = j \mid Y_1 = i\} \quad (8)$$

oraz rozkład brzegowy zmiennej  $Y_1$ , który odmiennie niż w (1) traktuje wartość 0:

$$\Pr^* \{Y_1 = i\} = g^*(i) = \begin{cases} \gamma & \text{dla } i = 0, \\ \frac{1 - \gamma}{1 - g(0)} g(i) & \text{dla } i \in N, \end{cases} \quad (9)$$

gdzie  $\gamma$  jest ustaloną liczbą z przedziału  $(0, 1)$ , zaś funkcje  $g$  i  $h$  są takie same jak w (1). Jeśli  $\gamma = g(0)$ , to  $\Pr^* \{Y_1 = i\} = g^*(i) = g(i) = \Pr \{Y_1 = i\}$  i oba rozkłady łączne są identyczne. Jeśli  $\gamma \neq g(0)$  a funkcje  $g$  i  $h$  zadane są wzorami (2), czyli są poissonowskie, to brzegowy rozkład zmiennej  $Y_1$  jest typu ZIP (*Zero Inflated Poisson*), zaś warunkowy dla  $Y_2$  pozostaje rozkładem Poissona. Rozkład taki oznaczamy ZIP-CP, a jego momenty mają ogólną postać

$$E^*(Y_1^m Y_2^n) = (1 - g(0))^{-1} [(1 - \gamma) E(Y_1^m Y_2^n) + (\gamma - g(0)) 0^m E(Y_2^n \mid Y_1 = 0)], \quad (10)$$

gdzie wykorzystuje się znaną postać momentów rozkładu P-CP. W szczególności:

$$E^*(Y_1) = (1 - g(0))^{-1} (1 - \gamma) E(Y_1) = (1 - g(0))^{-1} (1 - \gamma) \lambda_1, \quad (11)$$

$$E^*(Y_1^2) = (1 - g(0))^{-1} (1 - \gamma) E(Y_1^2) = (1 - g(0))^{-1} (1 - \gamma) \lambda_1 (1 + \lambda_1), \quad (12)$$

$$E^*(Y_2) = (1 - g(0))^{-1} [(1 - \gamma) E(Y_2) + (\gamma - g(0)) \lambda_2], \quad (13)$$

$$E^*(Y_2^2) = (1 - g(0))^{-1} [(1 - \gamma) E(Y_2^2) + (\gamma - g(0)) \lambda_2 (1 + \lambda_2)], \quad (14)$$

$$E^*(Y_1 Y_2) = (1 - g(0))^{-1} (1 - \gamma) E(Y_1 Y_2) = (1 - g(0))^{-1} (1 - \gamma) \lambda_1 \exp(\alpha) E(Y_2), \quad (15)$$

$$\text{Var}^*(Y_1) = \frac{1 - \gamma}{1 - g(0)} \lambda_1 \left( 1 + \frac{\gamma - g(0)}{1 - g(0)} \lambda_1 \right), \quad (16)$$



$$Var^*(Y_2) = \frac{1-\gamma}{1-g(0)} \{Var(Y_2) + \frac{\gamma-g(0)}{1-g(0)} [E(Y_2) - \lambda_2]^2 + \frac{\gamma-g(0)}{1-\gamma} \lambda_2\}, \quad (17)$$

$$Cov^*(Y_1, Y_2) = \frac{1-\gamma}{1-g(0)} \{Cov(Y_1, Y_2) + \frac{\gamma-g(0)}{1-g(0)} \lambda_1 [E(Y_2) - \lambda_2]\}, \quad (18)$$

co prowadzi do współczynnika korelacji postaci

$$Corr^*(Y_1, Y_2) = \frac{Cov(Y_1, Y_2) + \frac{\gamma-g(0)}{1-g(0)} \lambda_1 [E(Y_2) - \lambda_2]}{\sqrt{\lambda_1 (1 + \frac{\gamma-g(0)}{1-g(0)} \lambda_1) \{Var(Y_2) + \frac{\gamma-g(0)}{1-g(0)} [E(Y_2) - \lambda_2]^2 + \frac{\gamma-g(0)}{1-\gamma} \lambda_2\}}}, \quad (19)$$

gdzie  $E(Y_2)$ ,  $Var(Y_2)$  i  $Cov(Y_1, Y_2)$  są momentami rozkładu P-CP danymi w (3), (5) i (7). Równoważny zapis kowariancji w rozkładzie ZIP-CP to (po prostych przekształceniach)

$$\begin{aligned} Cov^*(Y_1, Y_2) &= (1-g(0))^{-2} (1-\gamma) \lambda_1 [(1-g(0)) \exp(\alpha) E(Y_2) - (1-\gamma) E(Y_2) - (\gamma-g(0)) \lambda_2] \\ &= (1-\exp(-\lambda_1))^{-2} (1-\gamma) \lambda_1 \lambda_2 \{[(1-\exp(-\lambda_1)) e^\alpha - (1-\gamma)] \exp(\lambda_1 (e^\alpha - 1)) - \gamma + \exp(-\lambda_1)\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Widzimy, że zmienne losowe  $(Y_1, Y_2)$  o łącznym rozkładzie prawdopodobieństwa ZIP-CP

- 1) są skorelowane ujemnie, jeśli  $[(1-\exp(-\lambda_1)) e^\alpha - (1-\gamma)] \exp(\lambda_1 (e^\alpha - 1)) < \gamma - \exp(-\lambda_1)$ ,
- 2) są skorelowane dodatnio, jeśli  $[(1-\exp(-\lambda_1)) e^\alpha - (1-\gamma)] \exp(\lambda_1 (e^\alpha - 1)) > \gamma - \exp(-\lambda_1)$ ,
- 3) są nieskorelowane, jeśli  $[(1-\exp(-\lambda_1)) e^\alpha - (1-\gamma)] \exp(\lambda_1 (e^\alpha - 1)) = \gamma - \exp(-\lambda_1)$ .

W przypadku  $\gamma = g(0) = \exp(-\lambda_1)$ , czyli brzegowego rozkładu Poissona dla  $Y_1$ , który przyjęli Berkhout i Plug (2004), skomplikowana formuła kowariancji (18) i (20) sprowadza się do znacznie prostszej postaci (7), gdzie znak kowariancji zależy jedynie od znaku stałej  $\alpha$ . W pozostałych przypadkach, tj. gdy brzegowy rozkład dla  $Y_1$  jest typu ZIP, znak kowariancji (20) zależy od wartości przyjmowanych przez  $\lambda_1$  i  $\alpha$  (a nie tylko od znaku tej drugiej stałej). Oczywiście, konkretna wartość kowariancji w rozkładzie ZIP-CP (a nie sam jej znak) oraz wartość współczynnika korelacji (19) zależą od wszystkich stałych występujących w funkcji prawdopodobieństwa tego rozkładu, tj. od  $\gamma$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  i  $\alpha$ .

Zauważmy też, że zwiększenie prawdopodobieństwa zerowej wartości  $Y_1$  (w stosunku do rozkładu Poissona o wartości oczekiwanej i wariancji  $\lambda_1$ ), czyli

przyjęcie rozkładu ZIP z  $\gamma > g(0)$ , prowadzi do wariancji (16) większej niż wartość oczekiwana (11). Zatem rozkład ZIP-CP umożliwia modelowanie zwiększonej wariancji obu obserwowanych zmiennych licznikowych, chociaż nie są one traktowane symetrycznie.

### 3. MODEL STATYSTYCZNY TYPU ZIP-CP

Rozważamy  $T$  stochastycznie niezależnych dwuwymiarowych zmiennych losowych  $(Y_{1t}, Y_{2t}; t = 1, 2, \dots, T)$  o różnych rozkładach typu ZIP-CP postaci

$$\Pr^* \{Y_{1t} = i, Y_{2t} = j\} = g_t^*(i) h_t(j, i) \quad (i, j \in N \cup \{0\}), \quad (21)$$

$$\Pr^* \{Y_{1t} = i\} = g_t^*(i) = \begin{cases} \gamma_t & \text{dla } i = 0, \\ \frac{1 - \gamma_t}{1 - g_t(0)} g_t(i) & \text{dla } i \in N, \end{cases}$$

$$\text{dla } i \in N; \quad g_t(i) = \exp(-\lambda_{1t}) (\lambda_{1t})^i / i!, \quad (22)$$

$$\Pr^* \{Y_{2t} = j | Y_{1t} = i\} = h_t(j, i) = \exp[-\lambda_{2t} \exp(\alpha i)] (\lambda_{2t})^j \exp(\alpha i j) / j!, \quad (23)$$

$$\lambda_{1t} = \exp(x_t \beta_1), \quad \lambda_{2t} = \exp(w_t \beta_2),$$

$$\gamma_t = \exp(-e^\delta \lambda_{1t}) = \exp(-\exp(\delta + x_t \beta_1)), \quad (24)$$

gdzie  $x_t$  i  $w_t$  są wierszami wartości zmiennych objaśniających, które mogą się pokrywać (w części lub w całości). Zmienne objaśniające określają prawdopodobieństwa pojawienia się poszczególnych wartości zmiennych  $Y_{1t}$  i  $Y_{2t}$ , a wpływ zmiennych objaśniających na te prawdopodobieństwa jest determinowany wielkością poszczególnych składowych kolumn  $\beta_1$  i  $\beta_2$  oraz wielkością parametru  $\delta$ , przy czym parametr  $\delta$  decyduje o wielkości odchylenia prawdopodobieństwa, że  $Y_{1t}=0$ , od wartości wynikającej z rozkładu Poissona. W tak określonym parametrycznym modelu statystycznym wektor parametrów  $\theta$  jest kolumną grupującą  $\delta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta_1$  i  $\beta_2$ . Zauważmy, że momenty rozkładu łącznego pary  $(Y_{1t}, Y_{2t})$ , podane w poprzedniej części pracy, zależą teraz od zmiennych objaśniających.

W literaturze specyfikacja oparta na wzorze (22) jest nazywana modelem płótkowym — ang. *hurdle model*; zob. Cameron i Trivedi (2005), s. 680. Porównanie tej specyfikacji z oryginalnym modelem ZIP podaje Winkelmann (2008). Głównymi zaletami naszej propozycji są prostota parametryzacji i stąd względna łatwość estymacji, a zwłaszcza prostota testowania zasadności redukcji nowego

modelu do standardowego modelu Poissona. Porównywanie oryginalnego modelu ZIP ze standardowym modelem Poissona nastręcza problemy związane ze specyfikacjami (hipotezami) niezagnieżdżonymi; zob. Winkelman (2008), str. 188.

Jeśli zaobserwowano  $Y_{1t} = y_{1t}$  i  $Y_{2t} = y_{2t}$  ( $t = 1, 2, \dots, T$ ), to odpowiadająca tym wartościom funkcja wiarygodności ma postać

$$L^*(\theta; y) = \left[ \prod_{t: y_{1t}=0} \gamma_t h_t(y_{2t}, 0) \right] \left[ \prod_{t: y_{1t}>0} \frac{1 - \gamma_t}{1 - g_t(0)} g_t(y_{1t}) h_t(y_{2t}, y_{1t}) \right], \quad (25)$$

gdzie  $y$  oznacza macierz  $(2 \times T)$  zawierającą zaobserwowane wartości zmiennych  $Y_{1t}$  i  $Y_{2t}$ .

W empirycznych zastosowaniach tego modelu ważne jest nie tyle wnioskowanie o  $\theta = (\delta, \alpha, \beta_1', \beta_2')'$ , ile raczej o wielu nieliniowych funkcjach parametru  $\theta$  — takich, jak prawdopodobieństwa łączne, brzegowe i warunkowe różnych wartości pary  $(Y_{1t}, Y_{2t})$  oraz momenty i inne charakterystyki jej rozkładu. Mało-próbkowe wnioskowanie zarówno o  $\theta$ , jak i nieliniowych funkcjach  $\theta$ , możliwe jest na gruncie statystyki bayesowskiej, której podstawy i przykłady zastosowań w empirycznych badaniach ekonomicznych prezentują np. Osiewalski (2001), Osiewalski i Pajor (2010).

Jak wiadomo, podejście bayesowskie sprowadza się do określenia na przestrzeni parametrów miary probabilistycznej (lub przynajmniej  $\sigma$ -skończonej) zwanej rozkładem *a priori*, a następnie wykorzystania funkcji wiarygodności do uzyskania rozkładu *a posteriori* parametrów (warunkowego względem danych i reprezentującego końcową wiedzę o  $\theta$ ). W szczególności ważnym zadaniem jest określenie kierunku i siły korelacji między  $Y_{1t}$  i  $Y_{2t}$ , czyli podanie (dla danego  $t$ ) prawdopodobieństwa *a posteriori* ujemnej korelacji, tj. warunku  $[(1 - \exp(-\lambda_t))e^\alpha - (1 - \gamma_t)] \exp(\lambda_t(e^\alpha - 1)) < \gamma_t - \exp(-\lambda_t)$ , oraz prezentacja pełnego rozkładu *a posteriori* współczynnika korelacji o ogólnej postaci (19). Dodatkową możliwością jest formalne bayesowskie porównanie empirycznej adekwatności dwóch niezagnieżdżonych modeli ZIP-CP, odpowiadających zamianie kolejności zmiennych objaśnianych (czyli ich numeracji). Stwarza to nowe pole badań statystycznych. Badanie adekwatności prostszego modelu P-CP, który zaproponowali Berkhout i Plug (2004), sprowadza się w ramach specyfikacji (21)-(24) do testowania prostej hipotezy  $\delta = 0$ ; można to przeprowadzić formalnie — porównując czynniki Bayesa dwóch niezagnieżdżonych modeli z  $\delta = 0$  i  $\delta \neq 0$  — lub użyć nieformalnego, ale prostszego, testu typu Lindleya w ogólniejszym modelu, dopuszczającym dowolną rzeczywistą wartość  $\delta$ . Dodajmy, że  $\delta > 0$  ( $\delta < 0$ ) oznacza prawdopodobieństwo zerowej wartości zmiennej  $Y_{1t}$  mniejsze (większe) niż w modelu Poissona. Zatem ważną kwestią jest obliczenie prawdopodobieństwa *a posteriori* takiej sytuacji.

Aby określić bayesowski model typu ZIP-CP, należy przyjąć rozkład *a priori* wektora  $\theta$ . W pierwszej pracy dotyczącej takiego modelu proponujemy założyć

niezależność *a priori* parametrów i dla każdego indywidualnie przyjąć standardowy rozkład normalny  $N(0, 1)$ . Zerowe wartości oczekiwane *a priori* oznaczają, że największą szansę dajemy wstępnie najprostszemu modelowi, w którym  $\{Y_{1t}\}$  i  $\{Y_{2t}\}$  są niezależnymi od siebie próbami losowymi prostymi z dwóch rozkładów Poissona. Jednostkowe odchylenia standardowe *a priori* dają gwarancję, że specyfikacje odległe od tej najprostszej mają bardzo istotne wstępne szanse. Wydaje się, że taki prosty łączny rozkład *a priori* niesie słabą tylko wiedzę wstępną (nie jest bardzo informacyjny) i gwarantuje łatwość symulacji Monte Carlo z rozkładu *a posteriori*, ale jego konkretna rola informacyjna (w stosunku do funkcji wiarygodności) oraz wrażliwość rozkładu *a posteriori* są kwestiami empirycznymi, które należy badać odrębnie dla każdego analizowanego zestawu dwuwymiarowych danych licznikowych.

#### 4. PRZYKŁAD EMPIRYCZNY

W celu ilustracji empirycznej przydatności zaproponowanego modelu statystycznego typu ZIP-CP oraz możliwości, jakie daje jego analiza bayesowska, wykorzystamy dane, które Polasik, Marzec, Fiszedler i Górka (2012) badali stosując model prostszy (P-CP), szacowany metodą największej wiarygodności. Dane przedstawiają liczbę płatności gotówką i kartą płatniczą dokonanych (w miesiącu) przez  $T = 1190$  osób, które w październiku i listopadzie roku 2010 oraz w styczniu roku 2011 ankietował *Pentor*. Wymienieni autorzy uzyskali i analizowali te dane w ramach projektu badawczego finansowanego przez Narodowy Bank Polski w roku 2010. Wyniki te wskazywały na dodatnią korelację między liczbą płatności gotówką i kartą płatniczą. Obecnie sprawdzimy, czy zastąpienie brzegowego rozkładu Poissona jednej zmiennej rozkładem typu ZIP jest empirycznie zasadne, a uzmiennienie w ten sposób możliwego znaku korelacji między zmiennymi wskaże na ujemną korelację między liczbą płatności gotówką i kartą (dla przynajmniej części respondentów). W niniejszych badaniach, o charakterze przede wszystkim metodycznym, wykorzystujemy dane surowe, tzn. bez indywidualnych wag uwzględniających reprezentatywność poszczególnych obserwacji (respondentów) wchodzących w skład próby; Polasik, Marzec, Fiszedler i Górka (2012) użyli danych ważonych.

W Tabeli 1 podajemy zmienne objaśniające i ich typowe wartości, tj. średnie w przypadku zmiennych ciągłych i najczęstsze dla zmiennych dychotomicznych.

W Tabeli 2 przedstawiamy dwuwymiarowy rozkład empiryczny liczby płatności gotówką i kartą oraz jego rozkłady brzegowe. Średnia liczba płatności gotówką wynosi 20,5 (wariancja jest równa 299), średnia liczba płatności kartą wynosi 5 (przy wariancji 45), korelację empiryczną zaś charakteryzuje współczynnik równy 0,008, wskazujący na brak liniowej zależności między liczbą płat-

Tabela 1

Informacje sumaryczne o zmiennych objaśniających

Zmienna objaśniająca	Średnia/ modalna
Płeć (1-mężczyzna, 0-kobieta)	0
Wiek (w latach)	40
Stan cywilny (1-żonaty lub zamężna, 0-nie)	1
Miejsce zamieszkania (1-miasto, 0 — wieś)	1
Miesięczny dochód w rodzinie (w tys. zł)	3,5
Wykształcenie (lata nauki)	12,5
Czy posiada internet (1-tak, 0-nie)	1

Źródło: opracowanie własne.

ności kartą ( $Y_1$ ) i gotówką ( $Y_2$ ). Dla obu zmiennych obserwujemy empiryczną wariancję zwiększoną w stosunku do średniej. Ponadto można zauważyć różnice między rozkładami brzegowymi, tj. empiryczny rozkład  $Y_2$  jest przesunięty na prawo (na osi nośnika rozkładu) względem  $p^{\text{emp}}(y_1)$ , tzn. wartość modalna i mediana dla liczby transakcji gotówką są większe niż dla płatności kartą. Dla tej ostatniej formy płatności obserwuje się dużą frakcję zer (34%), która kontrastuje z niskim (około 0,007) prawdopodobieństwem zera, obliczonym z rozkładu Poissona o wartości oczekiwanej równej średniej z próby (czyli 5). Dla płatności gotówką frakcja zer wynosi około 2%, co przewyższa prawdopodobieństwo z rozkładu Poissona równe zaledwie  $10^{-9}$ . W obu przypadkach wskazuje to na potrzebę zastosowania rozkładów z nadwyżką zer.

Uwzględniamy te same zmienne objaśniające dla obu zmiennych licznikowych, a zatem (biorąc pod uwagę wyrazy wolne w regresjach poissonowskich)  $\beta_1$  i  $\beta_2$  są kolumnami 8-wymiarowymi, natomiast wektor wszystkich parametrów  $\theta$  jest kolumną 18-wymiarową. Przypomnijmy, że  $\theta$  ma łączny normalny rozkład *a priori* o wartościach oczekiwanych 0 i jednostkowej macierzy kowariancji. Próbę zależną z 18-wymiarowego rozkładu *a posteriori* symulujemy za pomocą sekwencyjnego łańcucha Metropolis'a i Hastingsa (M-H), tj. metody z grupy MCMC (Markov Chain Monte Carlo). W przypadku obu modeli ( $M_1$ :  $Y_{1t}$  oznacza liczbę płatności kartą a  $Y_{2t}$  — liczbę płatności gotówką,  $M_2$ : na odwrót) przeprowadzono 500 tysięcy losowań traktowanych jako próba z rozkładu *a posteriori*. Wcześniej wykonano kilka milionów losowań wstępnych (spalonych), badając m.in. wrażliwość algorytmu M-H na jego punkty startowe w przestrzeni parametrów.

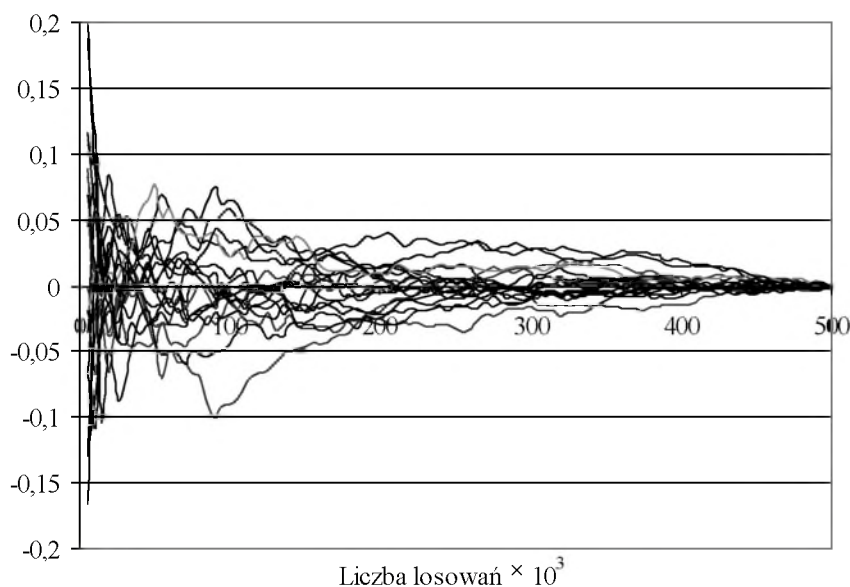
Na Wykresie 1 przedstawiono zbieżność przyjętego łańcucha M-H do rozkładu *a posteriori* w modelu  $M_1$ , która jest zadawalająca z uwagi na szybko stabilizujący się dla wszystkich parametrów przebieg tzw. standaryzowanych statystyk sum skumulowanych (CuSum), tzn. średnich arytmetycznych (z poszczególnych

Empiryczny łączny rozkład liczby płatności gotówką i kartą oraz jego rozkłady brzegowe

	Transakcje kartą ( $Y_1$ )									
	$p^{\text{emp}}(y_1, y_2)$	0	(0;5]	(5;10]	(10;15]	(15;20]	(25;30]	> 30	$p^{\text{emp}}(y_2)$	struktura
Transakcje gotówką ( $Y_2$ )	0	0	2	11	6	2	2	1	24	2%
	(0;5]	13	46	39	18	6	1	3	126	11%
	(5;10]	69	114	38	16	8	3	0	248	21%
	(10;15]	76	55	38	9	7	8	3	196	16%
	(15;20]	57	52	27	5	4	2	1	148	12%
	(20;25]	40	36	19	6	3	2	2	108	9%
	(25;30]	46	20	9	7	3	0	0	85	7%
	(30;35]	26	17	12	5	4	1	1	66	6%
	(35;40]	21	17	7	3	1	1	5	55	5%
	(40;45]	13	8	3	4	4	0	0	32	3%
	(45;50]	11	9	5	4	1	1	1	32	3%
	> 50	37	15	3	4	4	2	5	70	6%
	$p^{\text{emp}}(y_1)$	409	391	211	87	47	23	22	1190	
	struktura	34%	33%	18%	7%	4%	2%	2%		

Źródło: opracowanie własne.

losowań) standaryzowanych końcowymi wartościami średnich i odchyłeń standardowych. W przypadku drugiego modelu zastosowany algorytm także okazał się efektywnym narzędziem numerycznym.



Źródło: opracowanie własne.

Wykres 1. Zbieżność statystyk CuSum w modelu  $M_1$

Pierwszą kwestią, którą należy poddać empirycznej weryfikacji, jest wybór jednej z dwóch alternatywnych specyfikacji ( $M_1$ ,  $M_2$ ) modelu statystycznego typu ZIP-CP. Warto przypomnieć, że prawdopodobieństwo *a posteriori* modelu  $M_i$  ( $i = 1, 2$ ) wyraża, zgodnie z wzorem Bayesa, formuła

$$p(M_i|y) = \frac{p(y|M_i) \cdot p(M_i)}{p(y|M_1) \cdot p(M_1) + p(y|M_2) \cdot p(M_2)}. \quad (26)$$

Można przyjąć równe szanse *a priori*,  $p(M_i) = 0,5$ , bo brak jest teoretycznych przesłanek do faworyzowania któregoś modelu. Do porównania wystarczy więc czynnik Bayesa, czyli iloraz brzegowych gęstości wektora obserwacji  $BF = p(y|M_2) / p(y|M_1)$ ; zob. Osiewalski (2001), Wróblewska (2009). Wyniki prezentujemy w Tabeli 3.

Model  $M_1$  jest kilkaset rzędów wielkości lepszy od  $M_2$  i skupia prawie całą masę prawdopodobieństwa *a posteriori*; prawdopodobieństwo *a posteriori* modelu  $M_2$



wynosi praktycznie zero. Przewaga modelu  $M_1$  w opisie badanego zjawiska jest zdecydowana. W uzupełnieniu podajemy dla obu modeli wartości funkcji wiarygodności  $L^*(\hat{\theta}_{NW}; y)$ , zob. wzór (25), dla ocen największej wiarygodności, które zostały wyznaczone w ramach numerycznej realizacji algorytmu M-H. Dla modelu  $M_1$  otrzymano  $L^*(\hat{\theta}_{NW}; y) = 55\,235$ , a dla drugiej specyfikacji największa wartość funkcji wiarygodności była niższa, bowiem wyniosła 54 161. Z niebayesowskiego punktu widzenia wynik porównania modeli oparty na kryterium informacyjnym (którymkolwiek) także wskazuje na adekwatność modelu  $M_1$  (w kontekście  $M_2$ ). Warto wspomnieć, że z uwagi na niestandardową postać modelu (21)–(24) zastosowanie deterministycznych procedur optymalizacji funkcji wiarygodności spotkało się z ogromnymi problemami obliczeniowymi. Numeryczne narzędzia analizy bayesowskiej okazują się zatem przydatne także w estymacji metodą największej wiarygodności.

Tabela 3

Brzegowe gęstości wektora obserwacji i prawdopodobieństwa a posteriori obu modeli

Model	$M_1$ : $Y_{1t}$ liczba płatności kartą, $Y_{2t}$ — gotówką	$M_2$ : $Y_{1t}$ liczba płatności gotówką, $Y_{2t}$ — kartą
$\ln p(y M_i)$	55218,3	54142,8
$\text{Log}_{10} \text{BF}$	—	−467
Czynnik Bayesa (BF)	—	$\approx 0$
$p(M_i)$	0,5	0,5
$p(M_i y)$	$\approx 1$	$\approx 0$

Źródło: opracowanie własne.

Z uwagi na wyniki porównań modeli, dalsze rozważania natury interpretacyjnej będą opierać się na  $M_1$ , a wyniki dla drugiego modelu będą miały charakter uzupełniający. W Tabeli 4 podano wartości oczekiwane i odchylenia standardowe a posteriori parametrów naszej dwuwymiarowej regresji typu ZIP-CP. W  $M_1$  wszystkie zmienne objaśniające istotnie wpływają na liczbę płatności gotówką, natomiast tylko posiadanie internetu, wykształcenie i dochód powodują znaczące zróżnicowanie liczby płatności kartą. Oceny parametrów i błędy szacunku, które podają Polasik, Marzec, Fiszedler i Górka (2012), są bardzo zbliżone do bayesowskich wartości oczekiwanych i odchyłeń standardowych a posteriori prezentowanych w tej pracy — mimo, że w naszych badaniach liczba zmiennych objaśniających jest ponad dwukrotnie mniejsza. Brzegowy rozkład a posteriori parametru  $\delta$  (Wykres 2) pokazuje, że redukcja modelu ZIP-CP do P-CP jest bezza-



sadna, gdyż prawdopodobieństwo zerowej liczby płatności gotówką jest istotnie większe niż wynikałoby to z rozkładu Poissona. Wartość oczekiwana *a posteriori* dla  $\delta$  wynosi -1,876 przy odchyleniu standardowym 0,041.

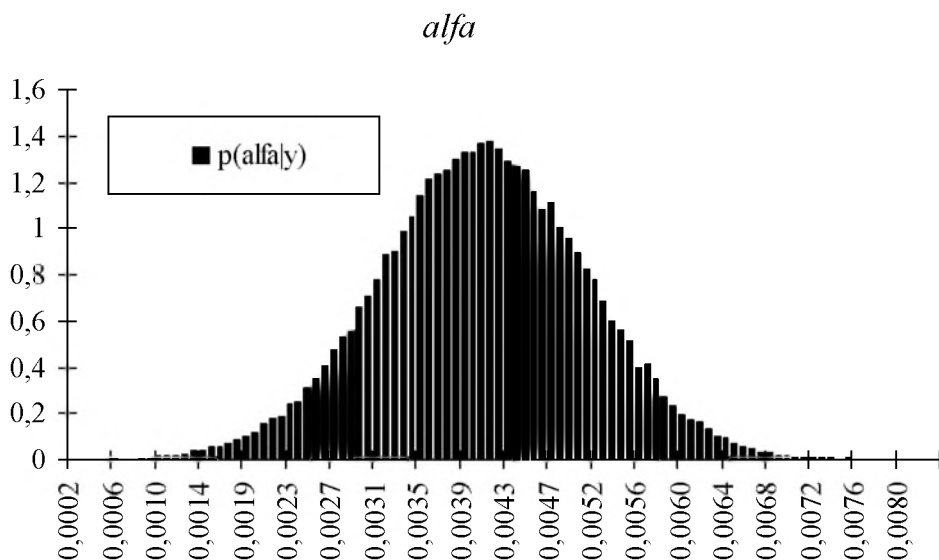
Tabela 4

Wartości oczekiwane i odchylenia standardowe *a posteriori* parametrów modeli

	Model	$M_1$		$M_2$	
	Zmienna/parametr	$E(\theta y)$	$D(\theta y)$	$E(\theta y)$	$D(\theta y)$
płatności kartą	„1”	0,909	0,098	-0,259	0,101
	Płeć	-0,045	0,025	0,006	0,026
	Wiek	-0,002	0,001	-0,007	0,001
	Stan cywilny	-0,047	0,029	0,056	0,031
	Miejsce zamieszkania	-0,007	0,028	0,077	0,030
	Dochód	0,051	0,010	0,094	0,011
	Wykształcenie	0,056	0,006	0,089	0,006
	Internet	0,360	0,039	0,558	0,042
płatności gotówką	„1”	2,826	0,049	2,803	0,048
	Płeć	-0,102	0,013	-0,093	0,013
	Wiek	0,008	0,001	0,008	0,001
	Stan cywilny	-0,158	0,015	-0,152	0,014
	Miejsce zamieszkania	0,145	0,015	0,133	0,015
	Dochód	0,016	0,006	0,019	0,005
	Wykształcenie	-0,008	0,003	-0,004*	0,003
	Internet	-0,085	0,016	-0,066	0,016
	$\alpha$	0,004	0,001	0,0023	0,0007
	$\delta$	-1,876	0,041	-1,638	0,053

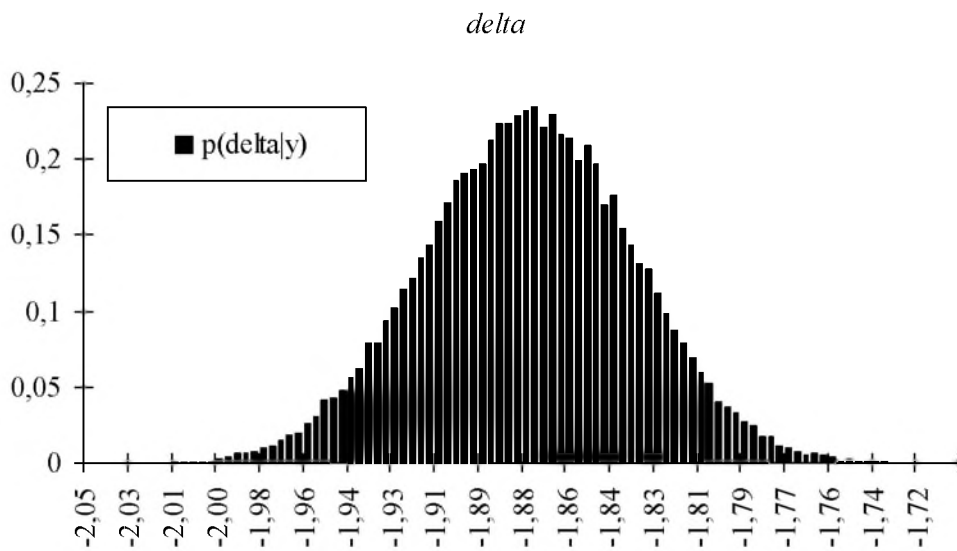
Źródło: opracowanie własne.

Zatem rozkład ten uległ znacznemu przesunięciu w stosunku do rozkładu *a priori* i jednocześnie zmniejszyło się jego rozproszenie. Dla  $\alpha$  charakterystyki te wynoszą odpowiednio 0,004 i 0,001, wskazując na istotnie dodatnią zależność warunkowej średniej liczby płatności kartą od liczby płatności gotówką. Brzegowy rozkład *a posteriori* parametru  $\alpha$  (Wykres 3) jest praktycznie ograniczony do przedziału (0,0006; 0,0076), czyli zawiera się w przedziale o wysokiej gęstości *a priori*, jednakże informacje z próby spowodowały uzyskanie rozkładu o znacząco mniejszym rozproszeniu.



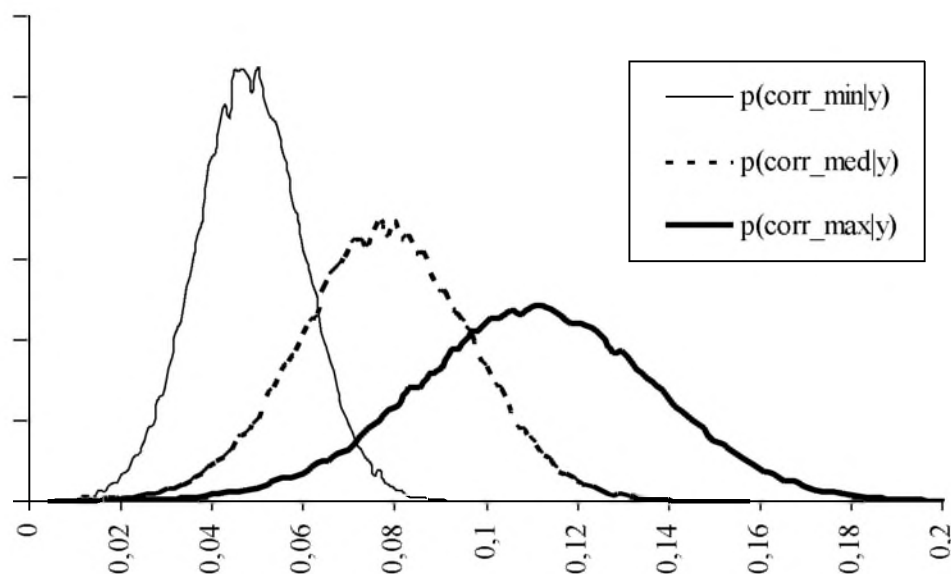
Źródło: opracowanie własne.

Wykres 2. Brzegowy rozkład a posteriori parametru  $\alpha$



Źródło: opracowanie własne.

Wykres 3. Brzegowy rozkład a posteriori parametru  $\delta$



Źródło: opracowanie własne.

Wykres 4. Rozkłady a posteriori próbkowych korelacji dla wybranych obserwacji

Osiewalski (2012) dowodzi, że w modelu typu ZIP-CP dodatniość parametru  $\alpha$  nie musi oznaczać dodatniej korelacji próbkowej zmiennych objaśnianych (jak to jest w modelu P-CP). Rozkłady *a posteriori* próbkowych korelacji trzech par  $(Y_{1t}, Y_{2t})$  — tych, dla których wartość oczekiwana *a posteriori* współczynnika korelacji jest najmniejsza, przeciętna w sensie mediany i największa — są pokazane na Wykresie 4. Dowodzą one słabej, ale jedynie dodatniej korelacji między liczbami płatności gotówką i kartą. Zastosowanie modelu bardziej adekwatnego, tj. typu ZIP-CP zamiast P-CP, nie zmienia (pod tym względem) wymowy wyników, które podali Polasik, Marzec, Fiszedler i Górka (2012).

## 5. PODSUMOWANIE

Zaproponowane uogólnienie modelu P-CP okazało się uzasadnione w przypadku wstępnych badań dotyczących preferencji polskich konsumentów w wyborze metod płatności. Wskazuje to na adekwatność modeli typu ZIP-CP w sytuacjach, gdy obserwuje się nadwyżkę (bądź deflację) obserwacji zerowych lub gdy dwie zmienne licznikowe, oddające rezultaty decyzji konsumentów, są ze sobą potencjalnie skorelowane (ujemnie albo dodatnio). Podejście bayesowskie pozwoliło na estymację parametrów rozważanych modeli bez odwoływania się do aproksymacji asymptotycznych. Bayesowskie porównywanie mocy wyja-

śniającej konkurencyjnych (niezagnieżdżonych) modeli formalnie potwierdziło wstępne wnioski uzyskane we wcześniejszych badaniach, a dotyczące wyboru jednej z dwóch alternatywnych specyfikacji statystycznych w kontekście zaobserwowanych danych.

Interesującym kierunkiem dalszych badań jest zastosowanie dwuparametrowej rodziny rozkładów Poissona (*generalized Poisson distribution*; zob. Consul i Jain (1973), Famoye i Singh (2006)) dla brzegowego rozkładu zmiennej  $Y_1$  bądź także dla rozkładu warunkowego drugiej zmiennej.

## BIBLIOGRAFIA

- Berkhout P., Plug E. (2004), *A bivariate Poisson count data model using conditional probabilities*, "Statistica Neerlandica" vol. 58, 349–364.
- Cameron A. C., Trivedi P. K. (1998), *Regression Analysis of Count data*, Cambridge University Press, New York.
- Cameron A. C., Trivedi P. L. (2005), *Microeconometrics: Methods and Application*, Cambridge University Press, New York.
- Consul P. C., Jain G. C. (1973), *A Generalization of the Poisson Distribution*, "Technometrics" 15, s. 791–799.
- Famoye F., Singh K. P. (2006), *Zero-Inflated Generalized Poisson Regression Model with an Application to Domestic Violence Data*, "Journal of Data Science", 4, s. 117–130.
- Kocherlakota S., Kocherlakota K. (1992), *Bivariate Discrete Distributions*, Marcel Dekker, New York.
- Lambert D. (1992), *Zero-inflated Poisson regression, with an application to defects in manufacturing*, "Technometrics" 34, s. 1–14.
- Marzec J. (2012), *Wybrane dwuwymiarowe modele dla zmiennych licznikowych w ekonomii*, "Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie — Metody Analizy Danych" nr 884, s. 59–70.
- Osiewalski J. (2001), *Ekonometria bayesowska w zastosowaniach*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków.
- Osiewalski J. (2012), *Dwuwymiarowy rozkład ZIP-CP i jego momenty w analizie zależności między zmiennymi licznikowymi*, [w:] „Spotkania z królową nauk (Księga jubileuszowa dedykowana Profesorowi Edwardowi Smadze)", red. A. Malawski i J. Tatar, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, Kraków 2012, s. 147–154.
- Osiewalski J., Pajor A. (2010), *Bayesian Value-at-Risk for a Portfolio: Multi- and Univariate Approaches Using MSF-SBEKK Models*, "Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics" 2, s. 253–277.
- Polasik M., Marzec J., Fiszeder P., Górka J. (2012), *Modelowanie wykorzystania metod płatności detalicznych na rynku polskim*, "Materiały i Studia" nr 265, NBP, Warszawa.
- Winkelmann R. (2008), *Econometric Analysis of Count Data*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Wróblewska J. (2009), *Bayesian Model Selection in the Analysis of Cointegration*, "Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics" 1, s. 57–69.

## ORTHOGONAL TRANSFORMATION OF COORDINATES IN COPULA M-GARCH MODELS — BAYESIAN ANALYSIS FOR WIG20 SPOT AND FUTURES RETURNS

MATEUSZ PIPIEŃ

Department of Econometrics and Operations Research, Cracow University of Economics  
*e-mail: eepipien@cyf-kr.edu.pl*

### ABSTRACT

We check the empirical importance of some generalisations of the conditional distribution in M-GARCH case. A copula M-GARCH model with coordinate free conditional distribution is considered, as a continuation of research concerning specification of the conditional distribution in multivariate volatility models, see Pipień (2007, 2010). The main advantage of the proposed family of probability distributions is that the coordinate axes, along which heavy tails and symmetry can be modelled, are subject to statistical inference. Along a set of specified coordinates both, linear and nonlinear dependence can be expressed in a decomposed form.

In the empirical part of the paper we considered a problem of modelling the dynamics of the returns on the spot and future quotations of the WIG20 index from the Warsaw Stock Exchange. On the basis of the posterior odds ratio we checked the data support of considered generalisation, comparing it with BEKK model with the conditional distribution simply constructed as a product of the univariate skewed components. Our example clearly showed the empirical importance of the proposed class of the coordinate free conditional distributions.

### STRESZCZENIE

M. Pipień. *Wielowymiarowe modele Copula M-GARCH o rozkładach niezmienniczych na transformacje ortogonalne — bayesowska analiza dla notowań spot i futures indeksu WIG20*. Folia Oeconomica Cracoviensia 2012, 53: 21–40.

W artykule przedstawiono uogólnienie rozkładu warunkowego w wielowymiarowym modelu typu GARCH, oraz poddano empirycznej weryfikacji skonstruowany model. Praca stanowi kontynuację badań prowadzonych przez Pipienia (2007, 2010) nad właściwą specyfikacją rozkładów warunkowych wektora stóp zmian instrumentów finansowych. Zasadniczym elementem określającym giętkość rozważanej klasy wielowymiarowych rozkładów jest możliwość zmiany układu współrzędnych, i – tym samym — kierunków w przestrzeni obserwacji, według których grube ogony i asymetria rozkładu mogą występować empirycznie. Zgodnie z przyjętą orientacją w przestrzeni obserwacji, możliwe jest modelowanie zależności pomiędzy elementami wektora losowego, zarówno o charakterze liniowym (stosowana transformacja liniowa) jak i nieliniowym (funkcja powiązań, copula).

W części empirycznej przedstawiamy wyniki modelowania dynamicznych zależności pomiędzy zwrotami z notowania spot i futures indeksu WIG20. Uzyskane rezultaty wskazują na zasadność proponowanego uogólnienia stosowanego w modelu BEKK. Model z proponowanym typem rozkładu warunkowego uzyskuje silne potwierdzenie empiryczne, mierzone ilorazem szans a posteriori i wartością brzegowej gęstości wektora obserwacji.

## KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

Bayes factors, multivariate GARCH models, coordinate free distributions, Householder matrices  
czynniki Bayesa, wielowymiarowe modele GARCH, macierze Householdera

## 1. INTRODUCTION

Most of contributions involved with multivariate GARCH (M-GARCH) models — for a survey see Bauwens, Laurent and Rombouts (2006) — rely on the assumption of the conditional Gaussian distribution. In spite of the fact that the M-GARCH models are applied in modelling and predicting temporal dependence in the second-order moments, some other properties of the conditional distribution, like for example fat tails and skewness, are also very important. This result was confirmed by Bayesian comparison of GARCH-type models with normal and Student- $t$  conditional distributions presented by Osiewalski and Pipień (2004). In terms of the model data support, measured by posterior odds ratio and posterior probabilities, they clearly showed that conditional normality is completely unrealistic in modelling financial time series. Hence, long journey beyond normality is necessary — see Genton (2004) — for better understanding the dependence structure between related time series in general, and between financial returns particularly.

In the presence of empirical analyses decisively rejecting conditional normal distribution, a few studies concentrated on the application of the conditional distributions that allow both for heavy tails and asymmetry within M-GARCH models. Some developments on this subject present Bauwens and Laurent (2005). Modern propositions of modelling volatility and conditional dependence between financial returns try to resolve the problem by complicating stochastic structure of the model rather, than generalising explicitly conditional distribution. Recently Osiewalski and Pajor (2009, 2010) propose MSF-BEKK model, as an example of the process attributed with both, the flexibility of the Stochastic Volatility family of models, and parsimony of parameterisation of simple M-GARCH covariance structures. Some other, more complicated multifactor processes has been recently proposed by Osiewalski and Osiewalski (2011, 2012). Those hybrid processes can outperform pure M-GARCH specification, even in the case of conditional normality. As an alternative to approach investigated by Osiewalski and Pajor (2009, 2010) one may consider an explicit generalisation of the conditional distribution, also leading to more empirically important specifications.

In modelling volatility and dynamic dependence of returns of different financial assets, a linear dependence is economically interpretable and popular. Standard empirical exercises in financial econometrics, like controlling and pricing risks, optimal portfolio allocation, analysing volatility transmission mechanism or contagion and building hedging strategies, rely on solutions that are strictly connected with measures of stochastic dependence of the linear nature. However last decade have seen particularly strong attention in modelling dependence in a nonlinear setting. One of the important topic of financial econometrics that made substantial progress during last decade, relates to making inference about measures of stochastic dependence that are alternatives to the conditional correlation.

It seems that both, definition of a nonstandard distribution of observables, and a more detailed analysis of dependence are crucial in proper modelling of financial returns. One of the approaches that may resolve to some extent both issues involves copula functions. The approach was intensively developed by Patton (2001, 2009), Jondeau and Rockinger (2006) and, in the case of Polish financial market, by Doman (2008), Doman and Doman (2009), Jaworski and Pitera (2012) and others. Vast empirical literature clearly indicate that volatility models built within framework of copula functions contribute substantially to standard empirical issues in financial econometrics stated above; see Embrechts, McNeil and Straumann (2002), Bradley and Taqqu (2004), Rodriguez (2007), Chavez-Demoulin and Embrechts (2010), Balkema, Nolde, Embrechts (2012).

The main goal of this paper is to check the empirical importance of some generalisations of the conditional distribution in M-GARCH case. We generalise the M-GARCH model proposed and empirically analysed by Pipień (2006, 2007) who applied a novel class of probability distributions, which is coordinate free in the sense formulated by Fang, Kotz and Ng (1990). Pipień (2010) considered a multivariate distribution with independent components, with skewness imposed according to the inverse probability integral transformations, discussed in details by Ferreira and Steel (2006) and Pipień (2006). In the next step, orthogonal transformation was incorporated in order to assure that fat tails and also possible skewness can be imposed along a set of coordinate axes. Consequently, the construct postulated the existence of a set of coordinate axes, along which the univariate components are independent and the densities of the marginal distributions are known analytically. Now we additionally consider a generalisation, by imposing copula function that captures possible dependence of nonlinear nature between elements of the random vector. The main advantage of the proposed family of probability distributions is that the coordinate axes are subject to statistical inference and can be very different from the ones defined by canonical basis. Along a set of coordinates, supported by the data, both, linear and nonlinear dependence can be modelled.

In the empirical part of the paper we consider the bivariate series of the returns on the spot and futures quotations of the WIG20 index (WIG20 and



FWIG20 instruments) covering the period from 21.12.1999 till 27.02.2008;  $t = 2053$  observations. In modelling the conditional dependence of the components of the bivariate time series we consider Copula-BEKK(1,1) model with coordinate free conditional distribution according to the postulates of the construct. For a comparison we also consider some restricted cases, leading to the much simpler conditional distribution. We apply formal approach to test explanatory power of a set of competing specifications, based on the posterior odds ratio, and discuss superiority and possible practical usefulness of the considered coordinate free conditional distribution. Additionally the posterior inference about coordinate axes is also presented.

## 2. A CLASS OF COORDINATE FREE CONDITIONAL DISTRIBUTIONS

The main goal of this chapter is to present a family of multivariate skewed distributions and apply it in the multivariate GARCH setting. The basic notion considered here is the unified representation of the univariate skewness that applies inverse probability integral transformation, proposed initially by Ferreira and Steel (2006). We follow the setting presented in the univariate case by Pipień (2006, 2007) and by Pipień (2010) in multivariate case. The skewed version of originally symmetric and unimodal density  $f(\cdot|\theta)$  (with cumulative distribution function  $F(\cdot|\theta)$ ) can be defined as follows:

$$s(x|\theta, \eta) = f(x|\theta) \cdot p(F(x|\theta)|\eta), \text{ for } x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

where  $p(\cdot|\eta)$  denotes the density of the distribution defined on the unit interval. The asymmetric distribution  $s(\cdot|\theta, \eta)$  is obtained by application of the density  $p(\cdot|\eta)$  as a weighting function of the density  $f(\cdot|\theta)$ . The case, when  $p(\cdot|\eta) = 1$ , restores symmetry. Any family of densities  $p(\cdot|\eta)$ , for  $\eta \in \mathbb{H}$ , defined over unit interval, is called skewness mechanism. For a review of skewing mechanisms that incorporate hidden truncation mechanism, some approaches based on the inverse scale factors, order statistics concept, Beta or Bernstein distribution transformation or a constructive method see Pipień (2006). The empirical importance of the conditional skewness in modelling the relationship between risk and return was also studied in the univariate case by Pipień (2007). Some recent developments confirm results presented by Pipień (2007) that it is possible to restore the relationship, mentioned above, once a highly nonstandard stochastic process is considered in volatility modelling; see for example Markov switching-in-mean Stochastic Volatility model, proposed by Kwiatkowski (2010).

Now let consider  $m$ -dimensional random vector  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)'$  and let denote by  $f_1(\cdot|\theta_1), \dots, f_m(\cdot|\theta_m)$  a set of unimodal (with mode at zero) univariate densities, parameterised by vectors  $\theta_1, \dots, \theta_m$  respectively. In the first step, for  $i = 1, \dots, m$ , we



impose skewness mechanisms  $p_i(\cdot | \eta_i)$  on densities  $f_i(\cdot | \theta_i)$ . Note that in general the construct does not require imposing the same type of skewness mechanism for each  $i=1, \dots, m$ . For simplicity, in the empirical part of the paper, we consider the case, where the same skewness mechanism is considered for each of the coordinates. Possible different asymmetry effects will result from different values of parameters  $\eta_i$ . The resulting density  $s_i(\cdot | \theta_i, \eta_i)$  takes the form presented in equation (1):

$$s_i(x | \theta_i, \eta_i) = f_i(x | \theta_i) \cdot p_i(F_i(x | \theta_i) | \eta_i), \text{ for } x \in \mathbb{R} \text{ and } i=1, \dots, m,$$

where  $F_i(\cdot | \theta_i)$  denotes cumulative distribution function. Initially, for the random vector  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)'$  we define the distribution with independent asymmetric components:

$$p(\varepsilon | \theta, \eta) = \prod_{i=1}^m s_i(\varepsilon_i | \theta_i, \eta_i), \quad (2)$$

where  $\theta = (\theta_1', \dots, \theta_m')'$ ,  $\eta = (\eta_1', \dots, \eta_m')'$ .

Pipień (2010) shows examples of distributions in bivariate cases indicating that possible outliers and asymmetry can be captured by distribution (2) only if those features of the data will occur along original coordinate axes, defined by canonical basis in  $\mathbb{R}^m$ . Also, any family of distributions (2) is not closed with respect to the orthogonal transformations of the components. Hence, in order to improve flexibility of our class of distributions, a special mechanism that would make the coordinate axes varying is incorporated according to the idea proposed by Ferreira and Steel (2006). We provide it on the basis of the following linear (affine) transformation of the random vector  $\varepsilon$ :

$$y = A' \varepsilon + \mu \quad (3)$$

for a nonsingular matrix  $A_{[m \times m]}$  and location vector  $\mu_{[m \times 1]} \in \mathbb{R}^m$ . The density of the distribution of the random vector  $y$  is defined by the following formula:

$$p(y | \theta, \eta, A, \mu) = |\det(A)|^{-1} \prod_{i=1}^m s_i((y - \mu)' A_i^{-1} | \theta_i, \eta_i), \quad (4)$$

where  $A_i^{-1}$  denotes the  $i$ -th column of  $A^{-1}$ . If the densities  $f_i(\cdot | \theta_i)$  are unimodal, with mode at zero, then the distribution the vector of  $y$  in (4) is unimodal, with mode defined by  $\mu$  and skewing mechanisms  $p_i(\cdot | \eta_i)$ . Transformation matrix  $A$  introduces the dependence between components of  $y$ , while  $\eta$  determines the skewness of the independent components of  $\varepsilon$ . Assuring the variability of the parameters, equation (4) generates a flexible class of multivariate distributions that is closed under orthogonal transformations. Hence, the construct (4) is coordi-

nate free, in the sense defined in Fang, Kotz and Ng (1990). In our approach we do not restrict the distribution to the case that  $A$  is a square root of the symmetric and positive definite covariance matrix. Consequently, practical application of specific families of multivariate distributions (4) requires interpreting the effect of the transformation matrix  $A$ . With no loss of generality let assume in (3) that  $\mu = 0_{[m \times 1]}$ :

$$y = A \cdot \varepsilon.$$

According to the theorem presented in Golub and Van Loan (1993) any nonsingular matrix  $A_{[m \times m]}$  can be written as the product of  $m \times m$  orthogonal matrix  $O_m$  and upper triangular matrix  $U_{[m \times m]}$  with positive diagonal elements:

$$A = O_m U,$$

and such a decomposition (called the QR decomposition) is unique. Now the results of the transformation matrix  $A$  can be considered in two steps:

$$y = A \cdot \varepsilon = (O_m U) \cdot \varepsilon = U \cdot O_m \cdot \varepsilon. \quad (5)$$

Initially, the random vector  $\varepsilon$  in (5) is subject to the rotation (if  $\det O_m = 1$ ) or rotoinversion (if  $\det O_m = -1$ ). Then the vector  $\xi = O_m \cdot \varepsilon$  is transformed according to the covariance-type linear transformation. The distribution of the vector  $\xi$  postulates that there exist a set of coordinate axes, along which the components of  $\xi$  are independent and the densities of the marginal distributions are known analytically. The main difference between distribution of  $\varepsilon$  and  $\xi$  is that those coordinate axes can vary from the axes defined by canonical basis in  $R^m$ . The distribution of  $y$  is then obtained by imposing scale transformation on the distribution of  $\xi$ , because matrix  $U$  can be interpreted as the Cholesky square root of the symmetric and positive definite matrix defining covariance structure.

A parametric sampling model that incorporates distributions described by equation (5) requires unique (one-to-one) parameterisation of the family of orthogonal matrices  $O_m$  in  $R^m$ . Also some restrictions have to be imposed, in order to assure identification. The one-to-one parameterisation was provided by Steward (1980) and Ferreira and Steel (2007), by an application of the Householder matrices decomposition. Let denote  $v = (v_1, \dots, v_m)^T \in R^m$ , the  $m$ -dimensional column vector. The Householder matrix  $H(v)$  (Householder reflection or Householder transformation) is defined as follows:

$$H(v) = I_m - \frac{2}{v^T v} v v^T.$$

Golub and Van Loan (1983) show some useful properties of  $H(v)$ . Firstly, for each  $v \in R^m$   $H(v)$  is orthogonal, and secondly  $H(v) = H(-v) = H(av)$ , for any scalar  $a \neq 0$ . From the second property if we restrict the vector  $v$  to the unit half sphere in  $R^m$

(denoted by  $HS^{m-1}$ ) we will keep the coverage of the whole family of Householder matrices. Parameterisation of the unit half sphere is easily obtained if we write down the vector  $v_\omega = (v_1, \dots, v_m) \in HS^{m-1}$  in polar coordinates:

$$v_1 = \sin(\omega_1), v_j = \sin(\omega_j) \prod_{s=1}^j \cos(\omega_s), \text{ for } j < m, \quad v_m = \prod_{s=1}^{m-1} \cos(\omega_s), \quad (6)$$

where

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{m-1}) \in \Omega_m = \begin{cases} (\pi/2, \pi/2) & \text{if } m = 2 \\ (0, \pi/2) \times (\pi/2, \pi/2)^{m-3} \times (\pi, \pi) & \text{if } m > 2. \end{cases}$$

Now, for any  $[m \times m]$  orthogonal matrix  $O_m$  with  $\det O_m = -1^{m+1}$ , there exist unique decomposition:

$$O_m = H(\omega^m) \dots H(\omega^2), \quad (7)$$

to  $m-1$  Householder reflections  $H(\omega^j)$  defined by vectors  $\omega_{[m \times 1]}^j$  of the form:

$$\omega_j = (o_{m-j}, v_{\omega_j})^*, j = 2, \dots, m,$$

for  $m-j$  dimensional vector of zeros,  $o_{m-j} = (0, \dots, 0)^*$  if  $j < m$  and for an empty vector for  $j = m$ . The vectors  $v_{\omega_j} \in HS^{j-1}$  are parameterised in terms of the polar coordinates applied in (6). The interesting case is  $m = 2$ , where the class of Householder reflections provide parametric family of orthogonal matrices of dimension  $[2 \times 2]$  with identification restrictions imposed; see Steward (1980), Golub and Van Loan (1983).

### 3. ANOTHER STEP — INTRODUCING COPULA FUNCTIONS

Distribution of  $y$ , defined by the density (4), where  $A = O_m U$ , with orthogonal matrix  $O_m$ , parameterised according to decomposition (7), is obtained on the basis of the linear transformation of a random vector  $\varepsilon$  with the density (2). Consequently, only linear dependence between random variables, representing coordinates, can be modelled. Possible changes in coordinates that may be subject to statistical inference, enriched flexibility of the family, however the nature of dependence of elements of the vector  $y$  may still be linear. In order to model a more complicated dependence structure in vector  $y$  we follow the approach that involves copula functions.

Let consider a bivariate random variable  $z = (z_1, z_2)^*$ , with cumulative density function (*cdf*)  $F$  and density function  $f$ , and with  $f_i$  and  $F_i$  the density and *cdf* of the marginal distribution of  $z_i$  respectively ( $i = 1, 2$ ). According to Sklar (1959), there exists a function  $C: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ , with the following properties:

1.  $C(u_1, u_2)$  is increasing in  $u_1$  and  $u_2$
2.  $C(0, u_2) = C(u_1, 0) = 0$ ,  $C(1, u_2) = u_2$ ,  $C(u_1, 1) = u_1$
3. For each  $(u_1, u_1', u_2, u_2') \in [0, 1]^4$ , such  $u_1 < u_1'$  and  $u_2 < u_2'$ :

$$C(u_1', u_2') - C(u_1', u_2) - C(u_1, u_2') + C(u_1, u_2) \geq 0,$$

such:

$$F(z_1, z_2) = C(F_1(z_1), F_2(z_2)).$$

The density of the joint distribution of  $z$  (if exist) is defined as follows:

$$f(z_1, z_2) = f_1(z_1) f_2(z_2) c_d(F_1(z_1), F_2(z_2)),$$

where:

$$c_d(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C}{\partial u_1 \partial u_2}(u_1, u_2).$$

Function  $C$  is called copula, and restores dependence reflected in the joint distribution  $F$ , when marginal distributions  $F_1$  and  $F_2$  are considered. Function  $c_d(\cdot, \cdot)$  is called the density of the copula  $C$ . In the case with  $C(u_1, u_2) = u_1 u_2$ , we have  $F(z_1, z_2) = F_1(z_1) F_2(z_2)$ ,  $c_d(u_1, u_2) = 1$  and  $f(z_1, z_2) = f_1(z_1) f_2(z_2)$ , hence  $C(u_1, u_2) = u_1 u_2$  defines stochastic independence between  $z_1$  and  $z_2$ . For detailed theory of copula functions and of the concept of measuring stochastic dependence within copula framework see Joe (1997) and Nelsen (2006).

Now, in the bivariate case ( $m = 2$ ), we generalise our distribution of  $y$ , defined by the density (4), by incorporating copula function in the distribution of the random vector  $\varepsilon$ . We consider a random vector  $y$  of the form:

$$y = U' O_m' z, \quad (8)$$

with upper triangular matrix  $U$  and the orthogonal matrix  $O_m$  defined by (7) and the bivariate random variable  $z$  with the following density:

$$p(z | \theta, \eta, \theta_{cop}) = s_1(z_1 | \theta_1, \eta_1) s_2(z_2 | \theta_2, \eta_2) c_d(S_1(z_1), S_2(z_2) | \theta_{cop}), \quad (9)$$

for the density  $c_d$  of a particular copula function parameterised by the vector  $\theta_{cop}$ , and skewed univariate densities  $s_i$ , considered initially in (2). In (9) by  $S_1$  and  $S_2$  we denote cdf functions of those skewed univariate distributions. Introducing copula function in the distribution of  $y$ , according to (9), provides another source of possible stochastic dependence in the random vector  $y$ , not involved with linear transformation with matrix  $A$ , considered initially. The case with  $C(u_1, u_2) = u_1 u_2$  (or equivalently  $c_d(u_1, u_2) = 1$ ) restores independence in the vector  $z$ , and hence

the distribution is defined just like for  $\varepsilon$  in (2). In this case only a linear dependence between coordinates of  $y$  can be modelled.

#### 4. THE SET OF COMPETING SPECIFICATIONS

By  $y_j$  we denote the two-dimensional vector of logarithmic returns at time  $j$ , i.e.  $y_j = (y_{j1}, y_{j2})'$ , where  $y_{ji} = 100 \ln(x_{ji}/x_{j-1,i})$  and  $x_{ji}$  denotes the value of  $i$ -th financial instrument at time  $j$ . In order to model conditional dependence between components of  $y_j$  we assume the following structure:

$$y_j = H_j^{0.5}(\beta, \psi_{j-1})' H(v_\omega) z_j, \quad j = 1, \dots, t, \quad (10)$$

where  $\psi_{j-1} = (\dots, y_{j-2}, y_{j-1})$  denotes the information set at time  $j$ . Random variables  $z_j = (z_{j1}, z_{j2})'$  follow the distribution defined in (9), where components  $s_i(\cdot | \theta_i, \eta_i)$  are the skewed versions of the standardised Student- $t$  densities with  $\nu_i > 0$  degrees of freedom parameter (hence  $\theta_i = \nu_i$ ), and skewness parameters  $\eta_i$ . Matrix  $H(v_\omega)$  in (10) is a Householder reflection defined by:

$$H(v_\omega) = I_m - 2 \frac{v_\omega v_\omega'}{v_\omega' v_\omega},$$

where  $v_\omega = (\sin \omega_1, \cos \omega_1)$ , and  $\omega_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Symmetric and positive definite matrix  $H_j(\beta, \psi_{j-1})$  follows BEKK(1,1) specification:

$$H_j(\beta, \psi_{j-1}) = A + B \cdot y_{j-1} y_{j-1}' \cdot B' + C \cdot H_{j-1}(\beta, \psi_{j-2}) \cdot C',$$

and  $\beta$  groups all required parameters, namely

$$\beta = (a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}).$$

Rewriting (10) in the following form:

$$y_j = W_j z_j, \quad j = 1, \dots, t,$$

where  $W_j = H(v_\omega) H_j^{0.5}(\beta, \psi_{j-1})$ , just like in (8), we can formulate the conditional distribution of  $y_j$  (with respect to  $\psi_{j-1}$ ) as a result of linear transformation of distribution of  $z_j$ , with transformation matrix  $W_j$ :

$$\begin{aligned} p(y_j | \psi_{j-1}, \nu_1, \nu_2, \eta_1, \eta_2, \omega_1, \beta, M_1) = \\ = |\det W_j|^{-1} s_1(y_j' W_{j(1)}^{-1} | \nu_1, \eta_1) s_2(y_j' W_{j(2)}^{-1} | \nu_2, \eta_2) c_d(S_1(y_j' W_{j(1)}^{-1}), S_2(y_j' W_{j(2)}^{-1}) | \theta_{cop}), \end{aligned}$$

where  $W_{j(i)}^{-1}$  denotes  $i$ -th column of  $W_j^{-1}$ , and  $s_i(\cdot | \nu_i, \eta_i)$  are skewed Student- $t$  densities:

$$s_i(z | \nu_i, \eta_i) = f_{st}(z | 0, 1, \nu_i) \cdot p(F_{st}(z | 0, 1, \nu_i) | \eta_i), z \in R,$$

with the density and cdf of the standardised Student- $t$  distribution with zero mode, unit precision and degrees of freedom parameter  $\nu_i > 0$  denoted by  $f_{st}(\cdot | 0, 1, \nu_i)$  and  $F_{st}(\cdot | 0, 1, \nu_i)$  respectively.

We considered five different single parameter copula functions, namely Gaussian, Clayton, Frank, Plackett and Gumbel, together with the case of no copula function. This gives us six competing sampling models collected in the set denoted by  $H_1$ . The analytic form of copulas and its densities can be found in Joe (1997) and Nelsen (2006). The set of copula function applied in the empirical part of the paper is restricted to only to the cases where only a single parameter in  $\theta_{cop}$  describes dependence in the random vector. Some other copula functions attributed with richer parameterisation can be found in Joe (1997).

The sampling model is represented by the following product of the conditional densities:

$$p(y, y_f | \nu_1, \nu_2, \eta_1, \eta_2, \omega_1, \beta, M_1) = \prod_{j=1}^{t+k} p(y_j | \psi_{j-1}, \nu_1, \nu_2, \eta_1, \eta_2, \omega_1, \beta, M_1), \quad (11)$$

where  $y = (y_1, \dots, y_t)$  denotes the matrix of observed daily returns, while  $y_f = (y_{t+1}, \dots, y_{t+k})$  groups forecasted observables. In order to complete Bayesian models, the prior distributions of all parameters must be stated. For the vector  $\beta$  we adopted prior used in Osiewalski and Pipień (2004), for skewness parameters  $\eta_i$  and degrees of freedom parameters  $\nu_i$  we applied prior distribution studied by Pipień (2007). Since the orthogonal component  $H(v_\omega)$  in (10) is parameterised by a single parameter  $\omega_1 \in (-\pi/2; \pi/2)$ , we assumed for simplicity uniform prior over the whole interval. Less trivial probability distributions, with some interesting topological properties, adopted for a subset of the orthogonal matrices, were proposed by Steward (1980).

All prior densities, except the one imposed on the parameter  $\omega_1 \in (-\pi/2; \pi/2)$ , were investigated previously in our papers. As it was clearly shown by Osiewalski and Pipień (2004) and Pipień (2007) the prior information included in the Bayesian models is very weak, as the prior distributions of parameters are very diffuse. For parameters in copula functions we imposed normal distributions truncated to the appropriate domain, with the prior mode at the point assuring independence. Consequently, we do not specify any type of dependence between coordinates and imposed appropriately diffused distributions. Consequently, the conclusions drawn from the empirical analysis does not seem to be biased by the prior knowledge, which is vague and not precisely stated in our case.

The main goal of the empirical part of the paper is to discuss the importance of orthogonal component  $H(v_\omega)$  and its form with respect to the type of the copula function included in the sampling model. As an alternative to models

in class  $H_1$  we also considered Copula-BEKK(1,1) specifications written in the following way:

$$y_j = H_j^{0.5}(\beta, \psi_{j-1})' z_j, j=1, \dots, t, \quad (12)$$

with no orthogonal mechanism, changing coordinates, included. The assumptions concerning  $z_j$  and  $H_j(\beta, \psi_{j-1})$  are remained unchanged. In particular the distribution of  $z_j$  may involve five different form of copula function and also may not involve copula. This gives us additional set of six competing specifications, denoted by  $H_0$ . The model 0 can be interpreted as a special case of (10), obtained by imposing zero restriction on Householder vector  $v_\omega = (0,0)'$ , leading to the case, where  $H(v_\omega) = I_2$ .

## 5. EMPIRICAL ANALYSIS

In the empirical part of the paper we analyse bivariate time series of the logarithmic returns of the spot and futures quotations of the WIG20 index, covering the period from 21.12.1999 till 27.02.2008;  $t=2053$  observations. The dataset, depicted on Figure 1, together with some descriptive statistics, exemplifies rather complicated nature of the dependence between both univariate time series. The possible dependence is clearly determined by the coincidence of outliers, making the empirical distribution considerably more dispersed along first and second quarter of the Cartesian product, as compared with relative stronger concentration of daily returns of spot and futures quotations with different sign at the same day. The modelled time series covers rather long history of spot and futures trading on the Warsaw Stock Exchange. But, we cut the dataset at the end of the February 2008 in order to compare our results of model comparison with those presented in a much simpler model setting by Pipień (2010).

Another reason to focus on the considered time series is that possible empirical importance of copula function in sampling model received so far attention only during the financial crisis. There is vast literature suggesting that during last global financial crisis, the dependence between financial time series become very complicated and nonstandard. Hence, many authors clearly indicated that copula functions are a promising tool in modelling time series during crises and market crashes; see Bradley and Taqqu (2004), Rodriguez (2007), Patton (2009). However, there is a little evidence in favour of the existence of nonlinear dependence prior to the latest financial crisis. Consequently, we did not updated our dataset and focus on the pre-crisis period. The empirical importance of copula construct in the sampling model presented in this paper will be much greater, if the data support will be obtained on the basis of the time series that ends before global financial crisis.



Table 1 presents the results of model comparison. We considered 12 competing specifications, imposing 5 different copula functions (Normal, Clayton, Frank, Plackett and Gumbel) and no copula function. In all cases respectively, we considered existence of orthogonal transformation against conditional distribution with marginal densities for both series defined as simply skewed Student- $t$  distribution. We denote by  $H_1$  the subset of models with orthogonal transformation included, while by  $H_0$  a class of Copula-BEKK models with no free coordinates in the conditional distribution. In Table 1 we put decimal logarithms of the mar-

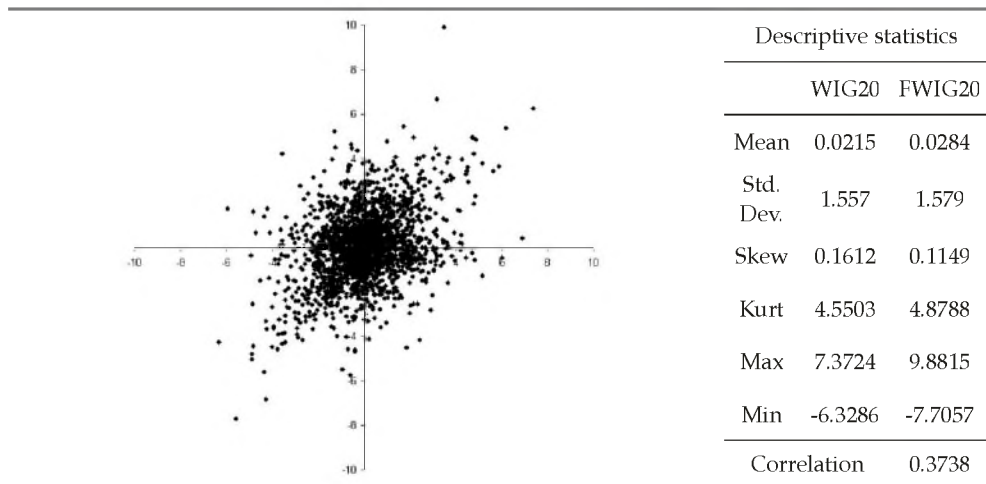


Figure 1. The plot of the daily returns on WIG20 (vertical coordinate) and on FWIG20 (horizontal coordinate) from 21.12.1999 till 27.02.2008;  $t=2053$  observations.

Table 1

Decimal logarithms of the marginal data density values in all competing specifications, and of the Bayes factor in favour of the existence of orthogonal component in model

Copula function applied in sampling model	Orthogonal component included ( $H_1$ )	No orthogonal component ( $H_0$ )	Bayes factor in favour of model from $H_1$ against model from $H_0$
No Copula	-2974.9263	-2977.5126	2.5863
Normal	-2971.2150	-2976.2267	5.0117
Clayton	-2972.2007	-2977.7896	5.5889
Frank	-2970.3253	-2973.0979	1.7726
Plackett	-2966.0346	-2968.1112	2.0766
Gumbel	-2973.3153	-2975.0409	4.1973



ginal data density values in case of all models, and also decimal logarithms of Bayes factors in favour of the existence of orthogonal component. The results clearly indicate the empirical importance of copula functions in sampling model. The model without the construct receives a little data support in both subsets  $H_1$  and  $H_0$  invariantly within  $H_1$  and  $H_0$  subset. The greatest data support both, in case of  $H_1$  and  $H_0$ , receives model with Plackett copula incorporated in sampling function.

Another interesting issue concerning model comparison is that orthogonal component always improves the explanatory power of models. In case of no copula sampling models, and also for all copula functions, decimal logarithm of the Bayes factor against pure Copula-BEKK specification is greater than one, indicating in most cases the decisive support of this component in the sampling model. This result seems to be invariant with respect to all remained parts of the sampling model, and was suggested previously by Pipień (2010). Table 2 presents the results of posterior inference about tail parameters in all models. We focus on posterior mean and standard deviations of the degrees of freedom parameters of the conditional distributions of univariate series. Within subsets of models  $H_1$  and  $H_0$ , the inference about the tails of the conditional distribution is relatively the same. In case of models, where orthogonal component excluded in the sampling model, posterior means of parameters  $\nu_1$  and  $\nu_2$  indicate that the conditional distribution is not of Gaussian type, however the posterior uncertainty, as measured by the posterior standard deviation, does not preclude strongly

Table 2

Posterior inference about tails of the conditional distribution in all competing specifications

Copula function applied in sampling model	Orthogonal component included (subclass of models $H_1$ )	No orthogonal component (subclass of models $H_0$ )
No Copula	$\nu_1$ 5.64 (1.03) $\nu_2$ 18.93 (3.45)	$\nu_1$ 7.49 (1.98) $\nu_2$ 10.85 (1.98)
Normal	$\nu_1$ 6.94 (1.26) $\nu_2$ 18.37 (3.40)	$\nu_1$ 7.49 (1.35) $\nu_2$ 10.84 (1.97)
Clayton	$\nu_1$ 5.77 (1.05) $\nu_2$ 19.13 (3.49)	$\nu_1$ 7.25 (1.32) $\nu_2$ 11.00 (2.01)
Frank	$\nu_1$ 6.93 (1.27) $\nu_2$ 19.65 (3.59)	$\nu_1$ 8.57 (1.59) $\nu_2$ 11.42 (2.08)
Plackett	$\nu_1$ 6.61 (1.21) $\nu_2$ 18.95 (3.43)	$\nu_1$ 8.82 (1.61) $\nu_2$ 12.00 (2.20)
Gumbel	$\nu_1$ 5.51 (1.01) $\nu_2$ 19.34 (3.55)	$\nu_1$ 7.46 (1.33) $\nu_2$ 10.36 (1.83)

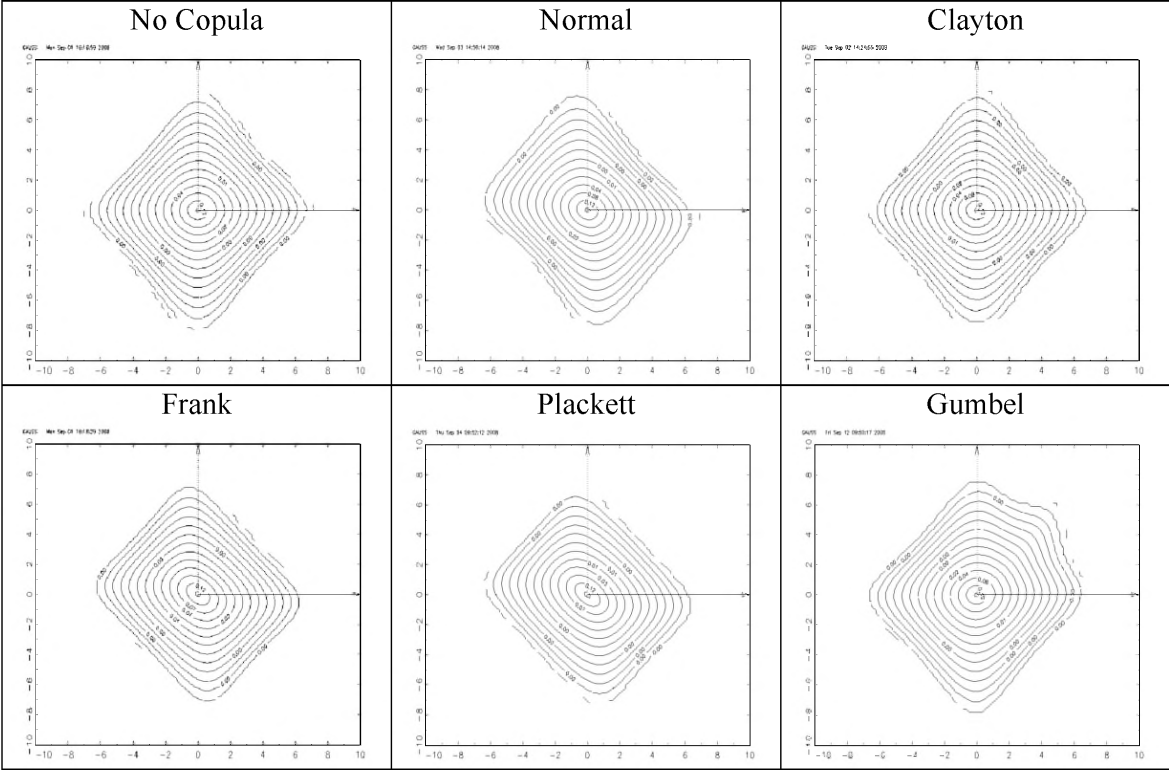
the same type of tail behaviour for both coordinates. If we include orthogonal transformation in sampling model, the posterior inference changes substantially, but in the same way in case of all copula functions and also in no-copula case. If we consider the mechanism that enables search for a set of coordinates, along which possible heavy tails and asymmetry can be modelled, the results of estimation of the properties of the conditional distribution in tails are changing. In all cases in subset  $H_1$ , invariantly with respect to the type of copula function, tails of the conditional distribution of univariate coordinates are different. The data clearly support heavy tails for the first coordinate, while the second one exhibit the Gaussian type tails.

In order to illustrate changes in conditional distribution, when orthogonal mechanism is included in the sampling model, we plotted the isodensities of  $z_j$  in case of models from subset  $H_0$  (Table 3) and isodensities of a random variable  $H(v_\omega) \setminus z_j$  in case of models from subset  $H_1$  (Table 4). All parameters required to draw the plots we chosen as posterior means. On the plots in Table 3 and 4, we draw vectors representing coordinates appropriate in sampling models. In case of models from subset  $H_0$  we draw vectors proportional to the vectors from canonical basis in  $R^2$ , namely  $e_1=(10,0)$  and  $e_2=(0,10)$ . In case of model from  $H_1$  (Table 4) a set of coordinates are subject to posterior inference and hence we present posterior means, together with the bands of the 95% HPD (Highest Posterior Density) intervals for  $H(v_\omega) \setminus e_1$  and  $H(v_\omega) \setminus e_2$  respectively.

Analysing isodensities plotted in Table 3 and 4 it is clear that the data support different directions, than canonical, along which heavy tails and possible asymmetry can be modelled. Copula functions change the shape of isodensities strongly. However the most important feature of the sampling model seems to be the existence of the orthogonal mechanism changing coordinates. Only in case of models from subset  $H_1$ , a more complicated dependence between observed time series can be discovered, as the shapes of isodensities in Table 4 exhibit considerable excess from regular "elliptical" shape. For models from subset  $H_0$ , without orthogonal mechanism, differences between shapes of isodensities of the distribution of  $z_j$  are rather minor among models. New, estimated, directions in the sampling models from subset  $H_1$  (Table 4) are different from initial, canonical, ones. Taking into account dispersion of the posterior distribution, the bands of the HPD intervals for  $H(v_\omega) \setminus e_1$  and  $H(v_\omega) \setminus e_2$  are located far away from the case, where  $H(v_\omega)=I_2$ . This clearly makes models without orthogonal component improbable in the view of the data. Additionally, changing directions in models from subset  $H_1$  is nontrivial and does not only involve rotation. Comparing vectors  $e_1$  and  $e_2$  with its corresponding images, we see that canonical basis is subject to inversion and then to appropriate clock-wise rotation. This is due to the properties of the Householder reflections applied in the construct. It enables to search for optimal orientation in a more composed way.

Table 3

The plots of the isodensities of  $z_j$  in models from class  $H_0$ , i.e. in sampling models with no orthogonal component included. Isodensities are plotted on the basis of values of parameters equal to posterior means



The plots of the isodensities of  $H(\nu_\omega) \cdot z_j$  in models from class  $H_0$ , i.e. in sampling models with no orthogonal component included. Isodensities are plotted on the basis of values of parameters equal to posterior means

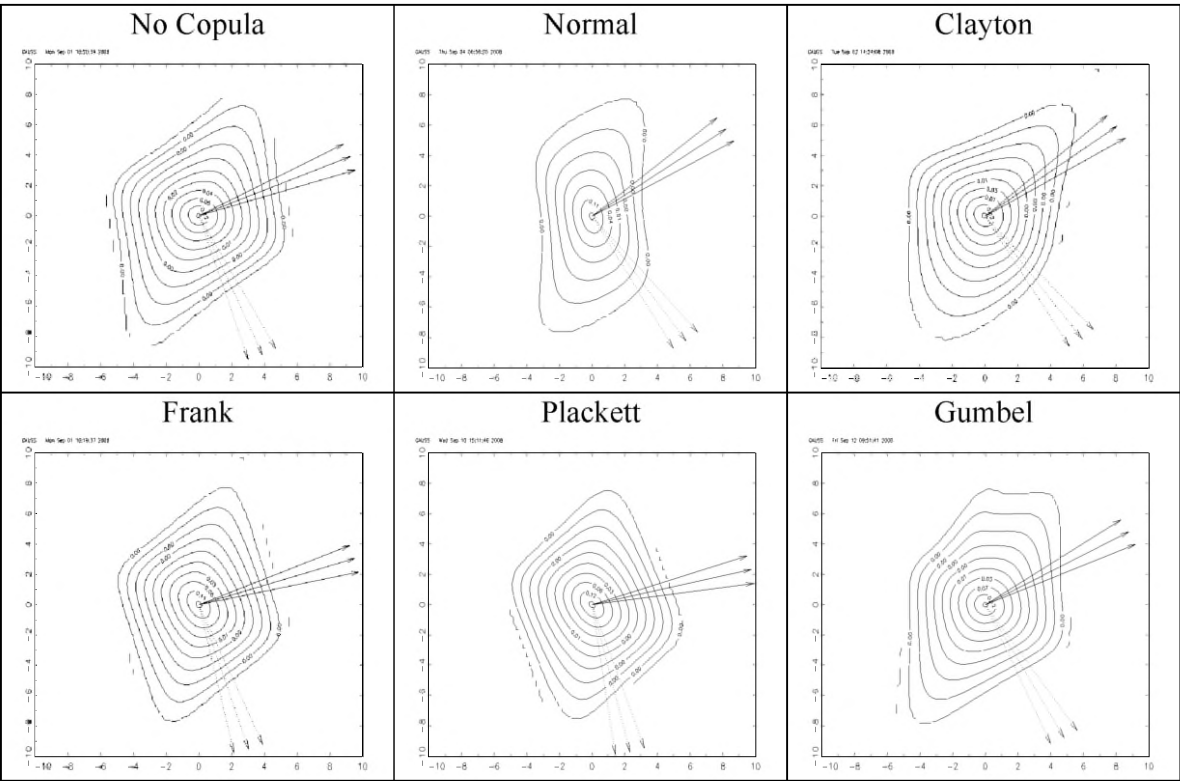
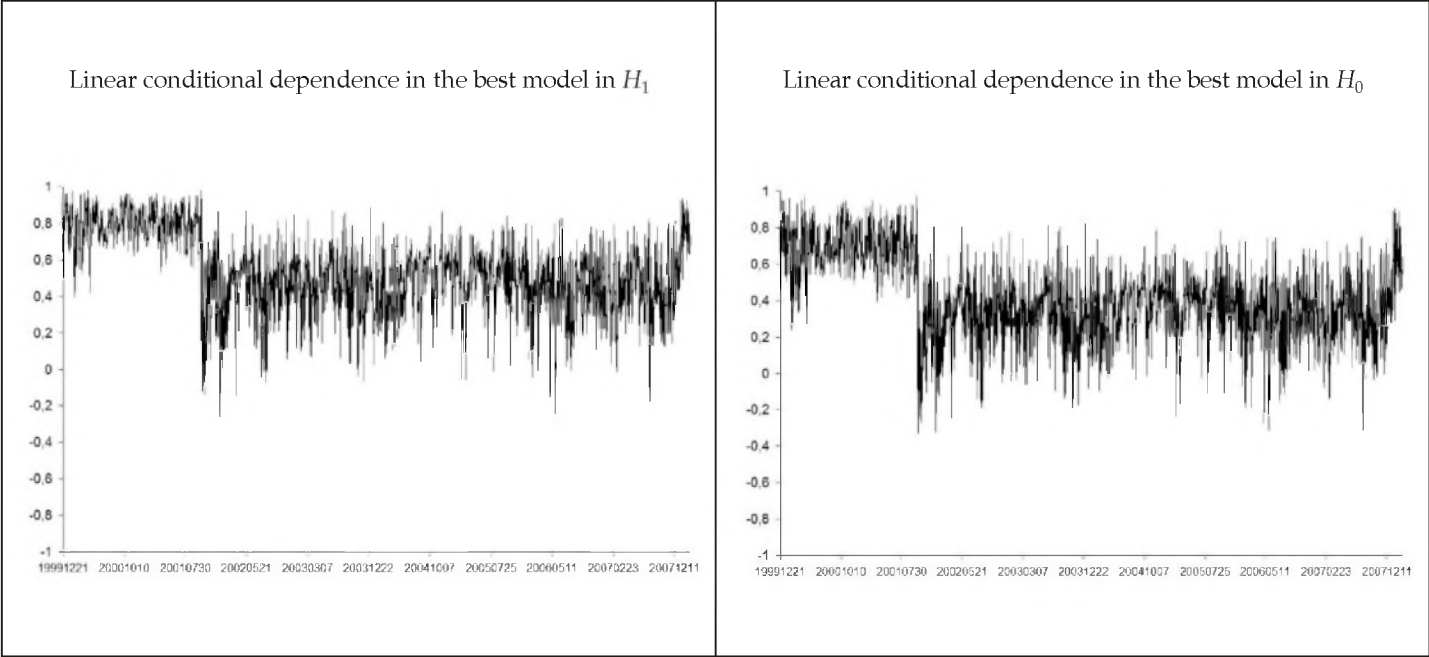


Table 5

Posterior inference about linear conditional dependence obtained on the basis of the elements of matrix  $H_j(\beta, \psi_{j+1})$  in case of the best copula function (Plackett). All parameters assumed to be equal to posterior means



A very important question concerning discussed empirical analysis involves possible conclusions about changes of the linear dependence between modelled univariate series, when orthogonal component and copula function is incorporated. In Table 5 we present plots of posterior expectations of conditional correlations between returns of spot and futures quotations of WIG20. Since the results are practically the same in case of all pairs of models, we focus our attention on the best models in  $H_1$  and  $H_0$  respectively, both based on Plackett copula function. In case of the best model from the set  $H_1$  the variability of the conditional correlation coefficient seems to be only slightly less variable during the whole time interval covering modelled time series.

Existence of orthogonal mechanism in sampling model does not seem to influence the dynamics of conditional linear dependence strongly. Both series of posterior expectations exhibit the same dynamic pattern, with strong variability around value 0.4, starting from August the 1<sup>st</sup> 2001, when Warsaw Stock Exchange quoted WIG20 index officially for the first time.

## 6. CONCLUDING REMARKS

The main goal of this paper was to check the empirical importance of some generalisations of the conditional distribution in M-GARCH case. We considered copula M-GARCH model with coordinate free conditional distribution. We continue research concerning specification of the conditional distribution in multivariate volatility models started by Pipień (2007, 2010). The main advantage of the proposed family of probability distributions is that the coordinate axes, along which heavy tails and symmetry can be modelled, are subject to statistical inference. Along a set of specified coordinates both, linear and nonlinear dependence can be expressed in formal and composed form.

In the empirical part of the paper we considered a problem of modelling the dynamics of the returns on the spot and future quotations of the WIG20 index from the Warsaw Stock Exchange. On the basis of the posterior odds ratio we checked the data support of considered generalisation, comparing it with BEKK model with the conditional distribution simply constructed as a product of the univariate skewed components.

Our example clearly showed the empirical importance of the proposed class of the coordinate free conditional distributions. Both, orthogonal component, and copula function, are necessary in proper modelling of the conditional distribution of the vector financial returns. The existence of the orthogonal transformation of coordinates in observation space receives decisive data support invariantly with respect to the existence copula function in the sampling model and to the type of specified copula. The dataset support much different orientation in the sample space along which heavy tails, asymmetry and dependence between

coordinates, can be discovered. Among the class of copula function Plackett one received the greatest data support. Generally, presented in the empirical part of the paper noticeable flexibility of the class in directional modelling of the tails and asymmetry suggests that possible applications, concerning futures hedging or Value-at-Risk calculation, are very promising.

## REFERENCES

- Azzalini A. (1985), A Class of Distributions which Includes the Normal Ones, *Scandinavian Journal of Statistics* 12, 171–178.
- Balkema G., Nolde N., Embrechts P (2012), The shape of asymptotic dependence, [in:] *Prokhorov and Contemporary Probability Theory* [eds.:] A. Shiryayev, S. Varadhan, and E. Presman, Springer, Berlin.
- Bauwens L., Laurent S. (2005), A New Class of Multivariate Skew Densities with Application to Generalised Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Models, *Journal of Business and Economic Statistics* 23, 346–254.
- Bauwens L., Laurent S., Rombouts J. (2006), Multivariate GARCH Models: A Survey, *Journal of Applied Econometrics* 21, 79–109.
- Bradley B. O., Taqqu M.S. (2004), Framework for Analyzing Spatial Contagion between Financial Markets, *Finance Letters* 2, 8–16.
- Chavez-Demoulin V, Embrechts P (2010), Revisiting the edge, ten years on, *Communications in Statistics — Theory and Methods* 39, 1674–1688.
- Doman R. (2008), Modelling Conditional Dependencies between Polish Financial Returns with Markov Switching Copula Models, *Dynamic Econometric Models* 8, 21–28.
- Doman R., Doman M. (2010), Copula Based Impulse Response Analysis of Linkages between Stock Markets, *Risk Management eJournal* 05/2010; DOI:10.2139/ssrn.1615108.
- Embrechts P, McNeil A., Straumann, D. (2002), Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls [in:] *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, [ed.] Dempster M.A.H., Cambridge University Press, Cambridge, 176–223.
- Fang K.-T, Kotz S., Ng K.-W. (1990), *Symmetric Multivariate and Related Distributions*, Chapman and Hall, New York.
- Ferreira J. T. A. S, Steel M. F. J. (2006), A Constructive Representation of Univariate Skewed Distributions, *Journal of the American Statistical Association* 101, 823–839.
- Ferreira J. T. A. S, Steel M. F. J. (2007), Model Comparison for Coordinate-Free Multivariate Skewed Distributions with an Application to Stochastic Frontiers, *Journal of Econometrics* 137, 641–673.
- Genton M. G. (2004), *Skew Elliptical Distributions and Their Applications: A Journey Beyond Normality*, Chapman & Hall, London.
- Golub G.H., Van Loan C.F (1983), *Matrix Computations*, John Hopkins University Press, Baltimore.
- Jaworski P, Pitera M. (2012), On Spatial Contagion and mGARCH Models, *Institute of Mathematics, University of Warsaw Working Paper*.
- Joe H. (1997), *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman&Hall, London.
- Jondeau E., Rockinger M. (2006), The Copula-GARCH Model of Conditional Dependencies: An International Stock Market Application, *Journal of International Money and Finance* 25, 827–853.
- Kwiatkowski Ł. (2010), Markov Switching In Mean Effect. Bayesian Analysis in Stochastic Volatility Framework, *Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics* 2, 59–94.
- Nelsen R. B. (2006), *An Introduction to Copulas*, Springer, Berlin.



- Osiewalski J., Osiewalski K. (2011), Modele hybrydowe MSV-MGARCH z trzema procesami ukrytymi w badaniu zmienności cen na różnych rynkach, *Folia Oeconomica Cracoviensia* 52, 71–85.
- Osiewalski J., Osiewalski K. (2012), Modele hybrydowe z dwoma procesami ukrytymi, *Zeszyty Naukowe UEK, Seria Finanse* 895, (w druku).
- Osiewalski J., Pajor A. (2009), Bayesian Analysis for Hybrid MSF-SBEKK Models of Multivariate Volatility, *Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics* 1, 179–202.
- Osiewalski J., Pajor A. (2010), Bayesian Value-at-Risk for a Portfolio: Multi- and Univariate Approaches using MSF-SBEKK Models, *Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics* 2 (2010), 253–277.
- Osiewalski J., Pipień M. (2004), Bayesian Comparison of Bivariate ARCH-Type Models for the Main Exchange Rates in Poland, *Journal of Econometrics* 123, 371–391.
- Patton A. (2009), Copula-Based Models for Financial Time Series. [in:] Andersen T.G., Davis R.A., Kreiss J. P, Mikosch T., [eds], *Handbook of Financial Time Series*, Springer, Berlin, 767–785.
- Patton A. J. (2001), *Applications of Copula Theory in Financial Econometrics*, Unpublished Ph.D. dissertation, University of California, San Diego.
- Pipień M. (2006), Bayesian Comparison of GARCH Processes with Skewness Mechanism in Conditional Distributions, *Acta Physica Polonica B* 37, 3105–3121.
- Pipień M. (2007), An Approach to Measuring the Relation between Risk and Return. Bayesian Analysis for WIG Data, *Folia Oeconomica Cracoviensia* 48, 97–119.
- Pipień M. (2010), A Coordinate Free Conditional Distributions in Multivariate GARCH Models, [in:] *Financial Markets. Principles of Modelling Forecasting and Decision Making*, FindEcon Conference Monograph Series No. 8, Łódź University Press, Łódź, 99–111.
- Rodriguez J. C. (2007), Measuring Financial Contagion: a Copula Approach. *Journal of Empirical Finance* 14, 401–423.
- Sklar A. (1959), Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, *Publications de l'Institut Statistique de l'Université de Paris* 8, 229–231.
- Steward G. W. (1980), The Efficient Generation of Random Orthogonal Matrices with an Application to Condition Estimators, *SIAM Journal of Numerical Analysis* 17, 403–409.



## PODEJŚCIE STATYSTYCZNE W METODZIE DEA NA PRZYKŁADZIE JEDNOPRODUKTOWEGO MODELU BANKERA

ARTUR PRĘDKI

Katedra Ekonometrii i Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie  
*e-mail: predkia@uek.krakow.pl*

### ABSTRACT

A. Prędkie. *Statistical approach in DEA on the example of single-product Banker's model*. Folia Oeconomica Cracoviensia 2012, 53: 41–58.

In this paper idea statistical approach in DEA method on the example of the single-product Banker's model is described. Its assumptions and following from them properties of the DEA estimator of point value production frontier is presented. Selected problems are described, which can be object of statistical inference on the base of this model. Methods of the testing are proposed and the whole of considerations is illustrated by empirical example based on real data. Limitations connected with accepted model's assumptions, selected estimation's and testing's methods are given. Finally, importance of the model for development of the corresponding methodology is described.

### STRESZCZENIE

W pracy opisano ideę podejścia statystycznego w metodzie DEA na przykładzie jednoproduktowego modelu Bankera. Przedstawiono jego założenia i wynikające z nich własności estymatora DEA wartości funkcji produkcji w punkcie. Opisano wybrane problemy, które mogą być przedmiotem wnioskowania statystycznego na gruncie tego modelu. Zaproponowano także sposoby ich testowania, ilustrując całość rozważań przykładem empirycznym opartym na danych rzeczywistych. Podano również ograniczenia związane z przyjętymi założeniami modelowymi, wybraną metodą estymacji i sposobami testowania. Na koniec opisano znaczenie jednoproduktowego modelu Bankera dla rozwoju metodologii w tym zakresie.

### KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

metoda DEA, nieparametryczny model graniczny, miara nieefektywności/efektywności,  
wnioskowanie statystyczne

DEA method, nonparametric frontier model, measure of inefficiency/efficiency,  
statistical inference

## 1. PODEJŚCIE STATYSTYCZNE W METODZIE DEA

Klasyczna wersja metody analizy otoczki danych (DEA) ma charakter deterministyczny. W analizie procesu produkcyjnego wyraża się on przekonaniem, że na podstawie dostępnych danych, jesteśmy w stanie skonstruować *prawdziwy* zbiór możliwości produkcyjnych reprezentowany przez któryś z wariantów technologii płatom liniowej — zob. Prędkie (2006, 2012a). Tym samym, dla sytuacji jedno-produktowej, można również skonstruować *prawdziwą*, kawałkami liniową funkcję produkcji. Przyjęto więc, iż miary efektywności technicznej, skonstruowane na tej podstawie mierzą poziom efektywności *dokładnie*. Jednak błędy w danych, ich niepełność, ciągła zmienność, czy brak istotnych informacji o procesie produkcyjnym mogą przecież wypaczyć uzyskane rezultaty.

W podejściu statystycznym w metodzie analizy otoczki danych podchodzimy więc z dużą ostrożnością do jakości zebranych danych, a w konsekwencji do wyników uzyskanych za ich pomocą. Ową niepewność, związaną z danymi empirycznymi i wartościami miar efektywności technicznej, próbuje się tu opisywać i wyjaśniać przy użyciu odpowiednich modeli statystycznych. Rozważane modele zawierają większość założeń deterministycznych obecnych w klasycznej wersji metody, zob. np. Prędkie (2003), oraz założenia o charakterze stochastycznym, których zadaniem jest opis wspomnianej niepewności, związanej z danymi oraz z uzyskiwanymi wartościami miar efektywności technicznej. Wykorzystywane modele mają zwykle charakter nieparametryczny bądź semiparametryczny. Wiąże się to z postulatem, obecnym w deterministycznej wersji metody, by nie wprowadzać arbitralnych zależności analitycznych np. postaci granicy produkcyjnej. Przekłada się on również na część stochastyczną modelu, gdzie unika się z kolei założeń o charakterze parametrycznym, dotyczących np. postaci rozkładów zmiennych losowych występujących w modelu. Jeśli jest to niezbędne dla uzyskania zgodnej estymacji miary efektywności czy silniejszego wnioskowania, wprowadza się odpowiednie założenia parametryczne. W dalszym ciągu jednak postać granicy produkcyjnej nie jest zadana analitycznie. Powstaje wtedy model o charakterze semiparametrycznym.

W podejściu statystycznym zakłada się więc, iż *prawdziwa* postać zbioru możliwości produkcyjnych, a tym samym funkcji produkcji (dla przypadku jedno-produktowego) nie jest znana. W konsekwencji nie znana jest również *prawdziwa* wartość miary efektywności technicznej danej jednostki produkcyjnej. Deterministyczna wersja metody DEA służy tu właśnie aproksymacji *prawdziwej* postaci zbioru możliwości produkcyjnych oraz estymacji *prawdziwej* wartości miary efektywności technicznej danej jednostki produkcyjnej. W niektórych modelach wylicza się również mierniki rozproszenia związane z niepewnością dokonywanej estymacji. Konstruuje się np. aproksymacje przedziałów ufności oraz oceny obciążenia, czy wariancji związanej z estymowanymi wartościami miar. Możliwe jest także ogólniejsze wnioskowanie statystyczne związane nie tylko z warto-

ściami miar, ale z własnościami i charakterystykami nieznanej technologii. Przykładowo testuje się wypukłość zbioru możliwości produkcyjnych czy typ efektu skali charakteryzujący technologię. Dla sytuacji jednoproduktowej możliwe jest również wnioskowanie dotyczące wartości innych charakterystyk procesu produkcyjnego.

Oczywiście owa aproksymacja i estymacja jest odpowiedniej jakości tzn. charakteryzuje się określonymi własnościami statystycznymi. Głównie chodzi tu o własność zgodności estymatorów miar efektywności technicznej ale nie tylko, zob. Prędko (2010a, 2010b). Są to jednak dużo „słabsze” własności niż te uzyskiwane dla metod estymacji wykorzystywanych w modelach parametrycznych procesu produkcyjnego, zob. Kumbhakar i Lovell (2000). Wynika to po części z faktu, iż chcąc dotrzymać postulatu unikania arbitralnych założeń o charakterze parametrycznym, godzimy się tym samym na model mniej informacyjny. Jednak estymacja za pomocą DEA „przegrywa” z klasycznymi metodami estymacji typu MNW czy MNK również na gruncie wspomnianych modeli parametrycznych. Sposób jej realizacji implikuje bowiem konieczność założenia wypukłości zbioru możliwości produkcyjnych oraz tzw. jednostronnego składnika losowego dla uzyskania podstawowej własności zgodności. W przypadku dwustronnych lub złożonych składników losowych, czy giętkiej formy funkcyjnej w modelu, jak dotychczas nie dowiedziano nawet zgodności tzw. estymatorów DEA. Z drugiej strony należy podkreślić, że estymacja za pomocą metody analizy otoczki danych wartości miary efektywności technicznej zachowuje własność zgodności w przypadku wieloproduktowym i to bez konieczności znajomości postaci analitycznej funkcji transformacji.

## 2. MODEL JEDNOPRODUKTOWY BANKERA

Pierwszym chronologicznie modelem, stanowiącym podstawę podejścia statystycznego do modelowania zmienności danych w metodzie DEA, jest tzw. jednoproduktowy model Bankera, zaproponowany w pracy: Banker (1993). W literaturze przedmiotu model ten nie ma nazwy własnej. Jednak ze względu na jego znaczenie dla rozwoju metodologii autor niniejszego opracowania proponuje wprowadzenie określenia związanego z nazwiskiem jego twórcy.

Przyjmuje się w nim, iż wytwarzany jest tylko jeden rodzaj produktu, co umożliwia zapisanie odpowiednich założeń za pomocą pojęcia funkcji produkcji. To zaś z kolei pozwala wykorzystać pewne idee modelowania charakterystyczne dla parametrycznych modeli statystycznych procesu produkcyjnego. Zaznaczmy jednak wyraźnie, iż jednoproduktowy model Bankera, w swej podstawowej wersji jest modelem nieparametrycznym. Przypomnijmy bowiem po raz kolejny, że w DEA unikamy arbitralnych założeń parametrycznych. Wprowadza się tu wprawdzie pojęcie składnika losowego, jednak założenia o nim również mają charakter nieparametryczny.

Przejdźmy teraz do szczegółów i przedstawmy odpowiednie postulaty. Zostały one przeformułowane i uzupełnione w porównaniu z pracą źródłową — Banker (1993), dla zwiększenia czytelności i spójności wywodu.

Pierwszy z nich jest zapisem założeń obecnych w deterministycznej wersji metody przy użyciu funkcji produkcji.

**Założenie 1:** Jednostki produkcyjne wytwarzają *jeden* rodzaj produktu z  $m$  rodzajów nakładów i posługują się tą samą technologią reprezentowaną przez nie-malejącą, wklęsłą funkcję produkcji  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $X$  jest wypukłym i zwartym podzbiorem  $\mathbb{R}_{+0}^m$ .

W praktyce zawsze można przyjąć konkretne wielkości ograniczające dany zbiór nakładów  $X$ , co gwarantuje jego zwartość. Własności zbioru  $X$  i funkcji  $g$  zawarte w założeniu 1 implikują ciągłość granicy produkcyjnej (zob. Banker (1993), przypis 4). Z kolei własność ciągłości  $g$  jest wykorzystywana w dowodzie zgodności estymatora DEA.

Kolejne założenia mają charakter stochastyczny, opisują sposób generowania obserwacji oraz modelują niepewność związaną ze zmiennością danych.

**Założenie 2:** Dane są ilości użytych nakładów i wytworzonych produktów dla  $n$  producentów w postaci próby  $\chi_n = ((x_j, y_j) \in X \times \mathbb{R}_+, j = 1, \dots, n)$  rozumianej jako realizacja ciągu wektorów losowych o tym samym rozkładzie.

Tak samo jak realizację będziemy oznaczać sam ciąg wektorów losowych. Z kontekstu będzie zawsze jasno wynikać, którą interpretację należy przyjąć. Podobną konwencję przyjmuje się w modelach regresyjnych, gdzie zmienną objaśnianą i objaśniającą oznacza się często identycznie jak ich realizację.

W celu zapisania dalszych założeń wprowadźmy następującą definicję.

**Definicja 1:** Wyrażenie  $\varepsilon_j = g(x_j) - y_j$ , będziemy nazywać  **$j$ -tym odchyleniem** od granicy produkcyjnej.

W metodzie DEA rozważa się zwykle miary *efektywności* technicznej, jednak ze względu na nieujemny znak tego odchylenia i jego znaczenie w podobnych modelach parametrycznych przyjmuje się tutaj, iż jest on miarą *nieefektywności* (por. Kumbhakar i Lovell (2000)).

Przedstawmy dwa kolejne założenia.

**Założenie 3:** Odchylenia od granicy produkcyjnej są zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, reprezentowanym przez gęstość  $f$ :

$$\forall z < 0: f(z) = 0.$$

Założenie to implikuje w szczególności, iż znaki odchylen  $\varepsilon_j$  są nieujemne z prawdopodobieństwem jeden. Odchylenie to jest więc odpowiednikiem jednostronnego składnika losowego w modelach parametrycznych. A to z kolei oznacza, że podwykres  $g$  obejmuje zaobserwowane dane.

Założenie czwarte daje możliwość rozważania wyrażeń  $g(x_j)$  i  $\varepsilon_j$  niezależnie, co bardzo upraszcza ich estymację.

**Założenie 4:** Dla dowolnego  $j = 1, \dots, n$ , rozkład odchylenia  $\varepsilon_j$  jest niezależny od rozkładu wektora  $x_j$ .

W niektórych przypadkach będziemy przyjmować alternatywnie dodatkowe postulaty.

**Założenie 5:** Gęstość  $f$  jest nierosnąca dla  $z \geq 0$  tzn.:

$$\forall 0 \leq z_1 \leq z_2: f(z_1) \geq f(z_2).$$

**Założenie 6:** Odchylenia  $\varepsilon_j$  są niezależnymi zmiennymi losowymi, dla  $j = 1, \dots, n$ .

**Założenie 7:** Wektor  $x_j$  charakteryzuje się gęstością  $h$ :

$$\forall x \in X: h(x) > 0.$$

**Założenie 8:** Dla dystrybuanty odchylenia  $\varepsilon_j$  zachodzi warunek:

$$\forall z > 0: F(z) > 0.$$

Parametrami podlegającymi estymacji na bazie zdefiniowanego modelu będą wartości  $g(x_j)$ , dla  $j = 1, \dots, n$ . Liczba parametrów rośnie tu więc wraz ze wzrostem liczebności próby, w przeciwieństwie do modeli parametrycznych, gdzie estymujemy wspólny dla wszystkich obserwacji zestaw parametrów tworzący analityczną postać  $g$ .

Formalnie estymację można przeprowadzić dla dowolnej wartości  $g(x_0)$ , przy ustalonym  $x_0 \in X$ .

**Definicja 2:** Estymator DEA wartości  $g(x_0)$ :

$$g_{\text{DEA}}(x_0) = \max \{y: \exists \lambda_j \geq 0: x_0 \geq \sum_{j=1}^n \lambda_{j0} x_j, y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_{j0} y_j, \sum_{j=1}^n \lambda_{j0} = 1\}.$$

Jest to jednoproduktowa wersja deterministycznego modelu z pracy: Banker, Charnes i Cooper (1984). Od inicjałów autorów tego źródłowego artykułu nosi on nazwę modelu BCC zorientowanego na produkty.

Za jego pomocą można też estymować odchylenie od granicy produkcyjnej, czyli miarę nieefektywności technicznej.

**Definicja 3:** Estymator DEA  $j$ -tego odchylenia od granicy produkcyjnej:

$$\varepsilon_{j,\text{DEA}} = g_{\text{DEA}}(x_j) - y_j.$$

Ze względu na rolę miernika nieefektywności jaką pełni odchylenie mówi się tu o jego estymacji, szczególnie w kontekście wniosku 1 (zob. też Banker (1993), s. 1268).

Przejdźmy teraz do własności wprowadzonych estymatorów.

**Twierdzenie 1:** Estymator DEA jest estymatorem MNW wartości  $g(x_j)$ , tzn. wartości  $g_{\text{DEA}}(x_j)$  są rozwiązaniem optymalnym problemu:

$$\max_{f, g} \prod_{j=1}^n f(\varepsilon_j),$$

gdzie:  $f, g$  — spełniają założenia 1–6 modelu Bankera.

Zapisując w ten sposób funkcję wiarygodności korzystamy już oczywiście z założeń 3, 4 i 6.

**Twierdzenie 2:** Jeśli spełnione są założenia 1–4 oraz 7–8 to estymator  $g_{\text{DEA}}(x_0)$  jest zgodny dla  $x_0$  z wnętrza zbioru  $X$ , rozumianego w sensie topologicznym — zob. np. Engelking (1976).

**Wniosek 1:** Przy założeniach jak w twierdzeniu 2, rozkład asymptotyczny estymatora  $\varepsilon_{j,\text{DEA}}$  jest identyczny z rzeczywistym rozkładem odchylenia  $\varepsilon_j$ .

**Twierdzenie 3:** Jeśli spełnione są założenia 1–4 i 6 oraz  $F(0) < 1$  to estymator  $g_{\text{DEA}}(x_0)$  jest obciążony.

Własność minimalności rozszerzenia estymatora DEA oraz założenie  $F(0) < 1$  implikuje dodatkowo dodatni znak obciążenia  $E[g(x_0) - g_{\text{DEA}}(x_0)]$ . Mówi się wtedy, że estymator ten jest obciążony do wewnątrz (z ang. *inward biased estimator*). Własność minimalności rozszerzenia polega na tym, że podwykres każdej funkcji produkcji spełniającej założenia modelu Bankera zawiera podwykres aproksymanty  $g_{\text{DEA}}$ . Dowody powyższych twierdzeń i wniosku zawarte są w artykule źródłowym — Banker (1993).

Podsumowując, jest to model procesu produkcyjnego, w którym spełnione jest dla każdej obserwacji  $j = 1, \dots, n$ , klasyczne równanie:

$$y_j = g(x_j) - \varepsilon_j.$$

Addytywny i jednostronny składnik losowy będący odchyleniem od granicy produkcyjnej pełni rolę miernika nieefektywności technicznej obiektu  $j$ -tego. Jednym, ze źródeł losowości jest tu więc nieefektywność procesu produkcyjnego. Zwróćmy jednak uwagę, że formalnie losowe są również wielkości wchodzące w skład wektora nakładów  $x_j$ . Oznacza to, że granica produkcyjna nie jest deterministyczna, ponadto przypomnijmy, iż nie jest ona zadana analitycznie. Brak dwustronnego czy złożonego składnika losowego świadczy o nie uwzględnieniu innego źródła losowości jakim są szoki zewnętrzne mogące wpływać na wielkość produktu. DEA jest tu metodą estymacji funkcji produkcji w punkcie, a przez to pośrednio również odchylenia od granicy produkcyjnej. Dzięki temu możliwe jest uzyskanie zgodnej oceny tego miernika nieefektywności technicznej.



### 3. ZASTOSOWANIA MODELU BANKERA

Rozszerzenie deterministycznej metody analizy otoczki danych i osadzenie jej w szerszym kontekście modelu statystycznego, jako metody estymacji jego parametrów, miało na celu modelowanie zmienności danych i niepewności odnośnie wartości miary nieefektywności technicznej. Dzięki odpowiedniej konstrukcji modelu przez Bankera możliwe stało się dowiedzenie, iż oceny miar nieefektywności uzyskiwane za pomocą metody DEA mają określone własności statystyczne. Nie możemy jednak zapominać, iż model statystyczny służy przede wszystkim celom wnioskowania statystycznego. Omówimy teraz problemy, które testuje się w ramach jednoproduktowego modelu Bankera.

#### 1. Testowanie istotności różnic pomiędzy dwiema grupami obserwacji.

Jeśli podejrzewamy, że grupa  $n$  jednostek produkcyjnych nie jest z jakiegoś powodu jednorodna (tzn. pochodzi z dwóch, różnych populacji) możemy to testować. Zakładamy, że owa niejednorodność przekłada się na istotne różnice pomiędzy wartościami miar nieefektywności obu grup. Testujemy więc podobieństwo rozkładów wartości miar lub istotność różnicy między średnimi wartościami miar z obu grup.

#### 2. Testowanie globalnego typu efektu skali

Jest to element weryfikacji modelu dotyczący jednej z charakterystyk niezna-nej technologii wyrażonej funkcją produkcji  $g$ . Ustalenie właściwego typu efektu skali wpływa na postać funkcji produkcji, jest to więc po części odpowiednik testowania jej postaci analitycznej na gruncie modeli parametrycznych.

#### 3. Testowanie specyfikacji modelu

Ustalenie listy nakładów istotnie wpływających na produkt i ogólnie na technologię jest sprawą kluczową dla wstępnej specyfikacji modelu. W modelach parametrycznych również testuje się zestawy zmiennych objaśniających, będących odpowiednikami nakładów (metoda Hellwiga czy analizy grafów). W naszym modelu nieparametrycznym, gdzie nie zadajemy analitycznie postaci funkcji produkcji, jest to szczególnie istotna kwestia. Tym większe znaczenie mają bowiem wtedy przyjęte do analizy zestawy nakładów. Za pomocą metody DEA testuje się głównie istotność uzupełnienia wyjściowego zestawu nakładów o nowe ich rodzaje.

Schemat testowania wszystkich omówionych problemów jest podobny jak w punkcie pierwszym. Mamy zawsze wyodrębnione dwie grupy jednostek produkcyjnych, w związku z tym mamy również odpowiadające im dwie grupy niezna-nych wartości miar nieefektywności technicznej. Obliczamy estymatory DEA miary nieefektywności także w podziale na grupy, które traktujemy jak dwie, niezależne grupy obserwacji. Następnie za pomocą odpowiednich testów niepa-

rametrycznych badamy podobieństwo ich rozkładów empirycznych. Wykorzystuje się tu najczęściej test Kolmogorowa-Smirnowa, ale również test Welcha czy Manna-Whitney'a — zob. Banker, Conrad i Strauss (1986), Banker i Chang (1995).

Banker wprowadza też do analiz testy parametryczne oparte na założeniu, iż miara nieefektywności technicznej ma określony rozkład parametryczny spełniający założenia modelowe. Podobnie jak w modelach parametrycznych, rozważa się tu zwykle rozkład wykładniczy albo półnormalny.

Autor uzasadnia swój pomysł odpowiednimi eksperymentami symulacyjnymi. W ramach symulacji znamy postać funkcji produkcji  $g$ , a tym samym rzeczywiste wartości miary nieefektywności technicznej. Możliwe jest więc zliczanie błędów I i II rodzaju popełnianych w poszczególnych testach. Ich liczba służy porównaniu skuteczności odpowiednich testów. Uzyskane wyniki wskazują, iż zaproponowane testy parametryczne są pod tym kątem porównywalne z używanymi zwykle testami nieparametrycznymi, a w niektórych sytuacjach dają nawet wyniki lepsze. Wykazuje on, iż odpowiednie testy są również konkurencyjne w stosunku do innych testów parametrycznych, w których metodą estymacji jest skorygowana MNK (SMNK). Wybór SMNK nie jest przypadkowy, gdyż podobnie jak DEA jest to metoda estymacji wykorzystywana przy jednostronnych odchyleniach od granicy produkcyjnej.

Przyjęcie parametrycznych rozkładów odchyleń oznacza jednak wprowadzenie arbitralnych założeń parametrycznych do modeli wyjściowych. Nie są one bowiem w żaden sposób testowane. Mamy więc model semiparametryczny, czyli teoretycznie bardziej informacyjny. Wprawdzie eksperymenty symulacyjne wskazują, że wnioskowanie może być wtedy silniejsze, ale pewności w tym zakresie mieć nie można. W ramach symulacji analizujemy przecież jedynie wybrane przypadki, a nie wszystkie możliwe. Szczegóły tych symulacji i uzyskane wyniki dostępne są w pracach Banker i Chang (1995) oraz Banker (1996). Jeśli chodzi o własności statystyczne estymatora DEA, to sytuacja nie ulega zmianie. W oparciu o nowe założenia nie wykazano bowiem jakichś kolejnych własności statystycznych estymatora DEA (np. efektywności, nieobciążoności czy choćby szybszej zbieżności).

Szczegóły oraz pogłębiony schemat testowania zostaną zilustrowane w części empirycznej pracy. Warto zaznaczyć, że idea modelowania zastosowana przez Bankera ma swoje źródła w bogatym dorobku związanym z modelami parametrycznymi procesu produkcyjnego, gdzie podobne struktury formalne funkcjonują już od przełomu lat 60-tych i 70-tych ubiegłego wieku — zob. prace źródłowe: Aigner i Chu (1968), Timmer (1971), Afriat (1972), Richmond (1974), Schmidt (1976). Granica produkcyjna jest w nich jednak zadana analitycznie w postaci funkcji liniowej lub logliniowej parametrów wspólnych dla wszystkich obserwacji. Ponadto w większości tych modeli jednostronny składnik losowy ma rozkład parametryczny. Wyjątkiem jest model z pracy Aigner i Chu (1968), który ma charakter czysto deterministyczny.



Większa informacyjność modeli parametrycznych umożliwia nie tylko obliczenie ocen mierników nieefektywności o określonych własnościach statystycznych, ale także szersze wnioskowanie statystyczne. W jego skład wchodzi:

- ocena charakterystyk rozproszenia mierników nieefektywności, która z kolei umożliwia konstrukcję odpowiednich przedziałów ufności;
- testowanie hipotez dotyczących wartości tychże miar oraz charakterystyk procesu produkcyjnego;
- weryfikacja założeń modelowych.

#### 4. OPIS WYKORZYSTANYCH TESTÓW

W części empirycznej wykorzystamy przykładowo trzy testy wspomniane w pracach źródłowych (Banker (1993, 1996)), preferowane przez autora opisanego modelu.

##### 1. Test Kołmogorowa — Smirnowa

Z testów nieparametrycznych największą popularnością w pracach Bankera cieszy się test Kołmogorowa — Smirnowa zgodności rozkładu pewnej cechy  $X$  w dwóch populacjach. Statystyka testowa ma tu postać:

$$K = \sqrt{\frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}} \sup_x |F_{N_1}(x) - F_{N_2}(x)|,$$

gdzie  $F_i(\cdot)$ , dla  $i = N_1, N_2$ , oznacza dystrybuantę empiryczną cechy dla grupy obserwacji pobranych z odpowiedniej populacji. Dzięki twierdzeniu Smirnowa rozkład tej statystyki jest znany i stabilizowany. Dla zadanego poziomu istotności  $\alpha$  odczytujemy więc wartość krytyczną  $K_\alpha$ . Jeśli  $K > K_\alpha$ , to hipotezę zerową o zgodności rozkładów cechy w obu populacjach odrzucamy, w przeciwnym razie nie ma podstaw do jej odrzucenia.

##### 2. Test parametryczny oparty na rozkładzie wykładniczym cechy

Przyjmuje się założenie, że cecha w obu populacjach ma rozkład wykładniczy o nieznanym parametrze odpowiednio  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ . W takiej sytuacji testowanie zgodności tych rozkładów polega na testowaniu równości  $\lambda_1 = \lambda_2$  zawartej w hipotezie zerowej. Ponownie pobieramy próby z obu populacji i obliczamy dla nich wartości cechy oznaczone odpowiednio przez  $x_1, \dots, x_{N_1}$  oraz  $y_1, \dots, y_{N_2}$ . Statystyka testowa:

$$F_{\text{EXP}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} x_i / N_1}{\sum_{i=1}^{N_2} y_i / N_2}$$

przy przyjętym założeniu i prawdziwości hipotezy zerowej ma rozkład  $F$  o parze stopni swobody  $(2N_1, 2N_2)$ . Dla zadanego poziomu istotności  $\alpha$  odczytujemy więc wartość krytyczną  $F_\alpha$  z tego rozkładu. Jeśli  $F_{\text{EXP}} > F_\alpha$ , to hipotezę zerową o zgodności rozkładów cechy w obu populacjach odrzucamy, w przeciwnym razie nie ma podstaw do jej odrzucenia.

### 3. Test parametryczny oparty na rozkładzie półnormalnym cechy

Przyjmuje się założenie, że cecha w obu populacjach ma rozkład półnormalny o nieznanym parametrze odpowiednio  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ . W dalszym ciągu testowanie przebiega analogicznie jak w poprzednim punkcie z tym, że używa się statystyki:

$$F_{\text{HN}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} x_i^2 / N_1}{\sum_{i=1}^{N_2} y_i^2 / N_2}$$

która przy przyjętym założeniu i prawdziwości hipotezy zerowej o równości parametrów ma rozkład  $F$  o parze stopni swobody  $(N_1, N_2)$ .

Cechą będącą przedmiotem testowania jest odchylenie od granicy produkcyjnej, natomiast zasada podziału na grupy będzie zależała od wybranego problemu będącego przedmiotem wnioskowania statystycznego.

## 5. CZĘŚĆ EMPIRYCZNA

Przejdziemy teraz do ilustracji wnioskowania statystycznego opisanego w części trzeciej i czwartej pracy na przykładzie empirycznym, opartym na danych rzeczywistych z polskiego sektora energetycznego. Dane pochodzą z pracy: Osiewalski i Wróbel-Rotter (2002) i dotyczą ilości określonych nakładów oraz jednego produktu 32 polskich elektrowni i elektrociepłowni w latach 1995–1996. Za nakłady obiektów przyjęto:

- kapitał (wartość brutto środków trwałych liczona w zł.);
- pracę (liczba pracowników);
- energię wsadu (liczoną w TJ).

Jedynym produktem działalności jednostek jest wytworzona energia (liczona w TJ). Jednostką energii jest tu teradžul (1GWh = 3,6TJ).

Powróćmy do problemów badawczych opisanych w części trzeciej pracy.

### 1. Testowanie istotności różnic pomiędzy dwiema grupami obserwacji.

Potraktujemy zbiory możliwości produkcyjnych opisujące technologie w latach 1995 i 1996 jako dwie osobne populacje. Mamy dane po 32 obserwacje dotyczące każdego ze zbiorów. Weryfikujemy hipotezę zerową, że technologia nie uległa znaczącym zmianom z roku 1995 na rok 1996. Zgodnie z omówionym już

Tabela 1

Estymatory DEA odchylen od granicy produkcyjnej dla lat 1995 i 1996 (kol. 2–3),  
statystyki empiryczne, wartości krytyczne i wyniki odpowiednich testów,  
przy poziomie istotności  $\alpha = 0,05$  (kol. 4–7)

o	$\varepsilon_{o,DEA,95}$	$\varepsilon_{o,DEA,96}$	$\alpha = 0,05$	K-S	EXP	HN
1	0,00	0,00	s.emp.	0,375	1,054	1,198
2	0,00	0,00	w.kryt.	1,360	1,513	1,804
3	0,00	0,00	wynik	H0	H0	H0
4	0,00	0,00				
5	12891,58	14371,65				
6	8403,69	8011,83				
7	8986,75	7602,05				
8	0,00	0,00				
9	815,42	9464,38				
10	9752,32	10412,27				
11	0,00	0,00				
12	7481,56	10754,48				
13	8063,59	7484,73				
14	387,24	0,00				
15	0,00	0,00				
16	3302,32	3514,79				
17	3333,70	1593,46				
18	0,00	0,00				
19	342,39	490,47				
20	474,32	92,39				
21	4260,55	4107,72				
22	6267,13	3467,75				
23	0,00	0,00				
24	1360,61	989,81				
25	1359,38	1326,36				
26	1953,60	1864,82				
27	1658,23	675,16				
28	739,74	0,00				
29	0,00	0,00				
30	0,00	0,00				
31	0,00	0,00				
32	0,00	0,00				

Źródło: obliczenia własne.

tokiem rozumowania obliczamy wartości estymatora DEA odchyłeń od granicy produkcyjnej dla obu lat osobno i badamy podobieństwo ich rozkładów empirycznych za pomocą testów omówionych w części czwartej pracy.

Widoczne jest, iż wszystkie testy wskazują na brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej (wiersz o nazwie „wynik” w tabeli 1). Dochodzimy więc do konkluzji, że wszystkie trzy testy potwierdzają, iż technologia nie uległa znaczącym zmianom z roku 1995 na rok 1996.

## 2. Testowanie globalnego typu efektu skali

Zweryfikujemy przykładowo hipotezę, iż technologia w roku 1995 charakteryzuje się globalnie stałymi efektami skali (szerszy przegląd problemów z tego zakresu będzie dostępny w pracy: Prędkie (2012b)). W tym celu obliczamy najpierw wartości estymatora DEA granicy produkcyjnej za pomocą danych z roku 1995, przy założeniu stałego efektu skali ze wzoru:

$$g_{\text{DEA}}(\mathbf{x}_o) = \max \{y: \exists \lambda_j \geq 0: \mathbf{x}_o \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{x}_j, y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j\},$$

a następnie odpowiednie oceny odchyłeń ze wzoru:

$$\varepsilon_{o,\text{CRS}} = g_{\text{CRS}}(\mathbf{x}_o) - y_o,$$

dla  $o = 1, \dots, n$ . Użyty indeks CRS pochodzi od nazwy *Constant Returns to Scale*. Wzór różni się od tego na  $g_{\text{DEA}}(\mathbf{x}_o)$  jedynie brakiem warunku sumowalności zmiennych  $\lambda_{j_o}$  do jedności (jest to tzw. model CCR zorientowany na produkty).

Tym razem wyniki testowania nie są zgodne. Wynik testu nieparametrycznego sugeruje przyjęcie założenia o globalnie stałych efektach skali. Natomiast testy parametryczne odrzucają tę hipotezę. Nie oznacza to jednak, że wskazują one na zmienny efekt skali. Mogą bowiem występować również tzw. globalnie nierosnące lub niemalejące efekty skali — zob. np. Prędkie (2012b).

## 3. Testowanie specyfikacji modelu

Zweryfikujemy przykładowo hipotezę, że czynnik kapitału ma nieistotny wpływ na technologię w roku 1995. W tym celu obliczymy wartości estymatora DEA odchylenia dla wszystkich obiektów w dwóch wariantach. W pierwszym zakładamy jak dotychczas, iż wykorzystujemy do produkcji wszystkie trzy nakłady (wartości  $\varepsilon_{o,\text{DEA}}$ ). W drugim natomiast przyjmujemy, że nakładami są tylko praca i energia wsadu (wartości  $\varepsilon_{o,\text{kap}}$ ).

Podobnie jak w problemie pierwszym, wszystkie trzy testy sugerują przyjęcie hipotezy zerowej. Nie stwierdzono więc istotnych różnic pomiędzy rozkładami empirycznymi obu grup wartości. Oznacza to, że czynnik kapitału ma nieistotny wpływ na technologię w roku 1995 i można go pominąć.

Tabela 2

Estymatory DEA odchyłeń od granicy produkcyjnej dla roku 1995, przy założeniu stałych i zmiennych efektów skali (kol. 2–3), statystyki empiryczne, wartości krytyczne i wyniki odpowiednich testów, przy poziomie istotności  $\alpha = 0,05$  (kol. 4–7)

o	$\varepsilon_{o,CRS}$	$\varepsilon_{o,DEA}$	$\alpha = 0,05$	K-S	EXP	HN
1	26844,16	0,00	s.emp.	0,875	2,266	5,413
2	0,00	0,00	w.kryt.	1,360	1,513	1,804
3	4884,65	0,00	wynik	H0	H1	H1
4	0,00	0,00				
5	33538,23	12891,58				
6	16537,51	8403,69				
7	16315,83	8986,75				
8	150,86	0,00				
9	6201,30	815,42				
10	20964,13	9752,32				
11	0,00	0,00				
12	14431,85	7481,56				
13	13291,97	8063,59				
14	1767,34	387,24				
15	0,00	0,00				
16	3451,68	3302,32				
17	3555,64	3333,70				
18	0,00	0,00				
19	409,21	342,39				
20	1073,16	474,32				
21	4884,84	4260,55				
22	6407,43	6267,13				
23	0,00	0,00				
24	1374,56	1360,61				
25	2069,52	1359,38				
26	2185,35	1953,60				
27	1845,60	1658,23				
28	1431,14	739,74				
29	314,30	0,00				
30	952,21	0,00				
31	377,17	0,00				
32	185,25	0,00				

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 3

Estymatory DEA odchyłeń od granicy produkcyjnej dla roku 1995, przy różnych zestawach nakładów (kol. 2–3), statystyki empiryczne, wartości krytyczne i wyniki odpowiednich testów, przy poziomie istotności  $\alpha = 0,05$  (kol. 4–7)

o	$\varepsilon_{o,DEA}$	$\varepsilon_{o,kup}$	$\alpha = 0,05$	K-S	EXP	HN
1	0,00	0,00	s.emp.	0,750	1,402	1,495
2	0,00	11722,80	w.kryt.	1,360	1,513	1,804
3	0,00	0,00	wynik	H0	H0	H0
4	0,00	0,00				
5	12891,58	12891,59				
6	8403,69	8733,13				
7	8986,75	9579,91				
8	0,00	0,00				
9	815,42	815,43				
10	9752,32	9792,43				
11	0,00	0,00				
12	7481,56	7481,55				
13	8063,59	8073,88				
14	387,24	387,25				
15	0,00	0,00				
16	3302,32	6392,57				
17	3333,70	6954,77				
18	0,00	0,00				
19	342,39	342,38				
20	474,32	6279,00				
21	4260,55	4342,29				
22	6267,13	7801,53				
23	0,00	0,00				
24	1360,61	1360,61				
25	1359,38	4670,37				
26	1953,60	2093,74				
27	1658,23	1721,40				
28	739,74	1791,49				
29	0,00	125,88				
30	0,00	0,00				
31	0,00	1406,15				
32	0,00	0,00				

Źródło: obliczenia własne.

## 6. UWAGI KRYTYCZNE

Przeprowadzając powyższe elementy wnioskowania musimy mieć świadomość pewnych ograniczeń i słabości, które związane są z wybranym sposobem testowania oraz właściwościami samego modelu. Ze względu na to, iż estymator DEA odchylenia jest jedynie estymatorem zgodnym należy pamiętać, że wszelkie przeprowadzone testy mają charakter asymptotyczny. Potrzebna jest więc przynajmniej kilkudziesięcioelementowa grupa obserwacji. Szczególnie wymagający jest pod tym względem test Kolmogorowa-Smirnowa ze względu na swój nieparametryczny charakter. Jest on słabszy od wykorzystanych testów parametrycznych w tym właśnie sensie, iż dla odrzucenia hipotezy zerowej potrzebna jest tu często dużo większa liczba obserwacji niż w wykorzystanych testach parametrycznych. Wynika to z prostego faktu, iż testy nieparametryczne działają w oparciu o model mniej informacyjny, a dopływ informacji następuje tu głównie poprzez zwiększenie liczebności próby. W przykładzie empirycznym jest to widoczne przy testowaniu typu efektu skali, gdzie przy tej samej liczebności próby, testy parametryczne wskazują na istotność badanych różnic. Natomiast w przypadku testu nieparametrycznego różnice odpowiednich rozkładów wartości nie są jeszcze wystarczające dla odrzucenia hipotezy zerowej.

Wszystkie powyższe testy wymagają ponadto, by rozważane dwie próby były *niezależne*. W naszym przypadku nie mamy żadnej gwarancji, że tak rzeczywiście jest, aczkolwiek przy wzroście liczebności próby pewne eksperymenty symulacyjne wskazują, iż sytuacja pod tym kątem ulega poprawie ze względu na własność zgodności estymatora DEA — zob. Banker (1993), przypis 7; Banker (1996).

Problemem jest też występowanie stosunkowo dużej frakcji obiektów efektywnych technicznie, czyli takich, dla których wartość odchylenia wynosi zero. Dla przykładu w założeniach twierdzenia Smirnowa, na którym opiera się odpowiedni test, występuje założenie o ciągłości dystrybucyjności nieznanego rozkładu odchylenia. Oznacza ono, iż prawdopodobieństwo wystąpienia w próbce dwóch jednakowych wartości powinno być równe zero. Tymczasem w każdej próbie będzie występować liczna frakcja odchyleń zerowych, co wynika z własności DEA czyli wybranej metody estymacji.

Przypomnijmy, iż w przypadku testów parametrycznych słabością jest też arbitralny wybór parametrycznego rozkładu odchylenia, który nie podlega weryfikacji. Ograniczenie stanowi również założenie wklęsłości funkcji produkcji przyjmowane w modelu. Jest ono niestety konieczne dla uzyskania zgodności estymatora DEA odchylenia od granicy produkcyjnej. Oznacza to, że prawdziwą granicą produkcyjną nie może być tu np. funkcja wklęsło-wypukła (np. giętka forma funkcyjna typu Translog). Jak w takim razie rozumiane są tu zmienne czy rosnące efekty skali? Odpowiedź na to pytanie autor niniejszej pracy próbuje udzielić w artykule: Prędkie (2012b). Problem wiąże się oczywi-

ście z pytaniem, jak definiuje się różne typy efektów skali dla wypukłego zbioru możliwości produkcyjnych.

## 7. ZNACZENIE MODELU BANKERA

Mimo opisanych w poprzedniej części licznych ograniczeń wynikających z założeń modelowych, własności metody estymacji oraz wybranych sposobów testowania, jednoproduktowy model Bankera stał się podstawą podejścia statycznego w metodzie DEA. Już sam autor w pracy: Banker (1996) próbuje rozszerzyć go na przypadek wieloproduktowy. Możliwość analizy technologii wieloproduktowej jest bowiem uważana za jedną z zalet deterministycznej wersji metody, podnoszoną często w literaturze przedmiotu.

Kolejni badacze, tworzący podejście statystyczne w metodzie analizy otoczki danych, odwołują się do prac Bankera oraz korzystają po części z jego dorobku i przemysłów. Proponują oni pewne nowe rozwiązania modelowe oraz modyfikacje wyjściowej metody estymacji. Szczególnie istotne są tu prace Dietera Gstacha, Timo Kuosmanena oraz zespołu badawczego skupionego wokół Leopolda Simara.

Przykładem może tu być konstrukcja modeli w orientacji na nakłady. Owa dwuorientacyjność miar efektywności/nieefektywności jest przecież tak charakterystyczna dla metody DEA. Banker pominął ten aspekt, przypuszczalnie ze względu na chęć powiązania swej propozycji z istniejącymi modelami parametrycznymi. Tradycyjna mikroekonomiczna i ekonometryczna analiza procesu produkcyjnego jest bowiem zwykle nastawiona na kwestię maksymalizacji produktu, a nie minimalizacji nakładu. W orientacji na nakłady rozważa się tu raczej kwestię minimalizacji kosztów, a nie bezpośrednio nakładów, czyli analizuje tzw. efektywność kosztową obiektów (a nie techniczną).

Innym przykładem jest kwestia aproksymacji zbioru  $T$  za pomocą wersji technologii płatami liniowych różnych od tej, która została wykorzystana w jednoproduktowym modelu Bankera. W sytuacji wieloproduktowej, przy braku analitycznej postaci funkcji transformacji, technologię opisuje zbiór możliwości produkcyjnych. W metodzie DEA podlega on aproksymacji w całości za pomocą tzw. technologii płatami liniowych — zob. np. Prędkie 2010b, 2012a. W pracy Bankera (1993), przypis 3 — wspomina się jedynie, iż aplikowalność innych wersji przebiega poprzez analogię. Natomiast w pracy: Banker (1996), s. 148–149, wprowadza się dla celów testowania globalnych typów efektów skali estymatory DEA miary efektywności oparte na aproksymacji  $T$  za pomocą technologii płatami liniowych, gdzie zakładamy globalnie stały albo niemalejący efekt skali. Nie dowodzi się jednak własności statystycznych tych estymatorów, następuje jedynie rozszerzenie założeń modelowych odnośnie zbioru  $T$  o dodatkowe jego własności. Dopiero kolejni badacze analizują szerzej tą kwestię — zob. np. Park, Jeong i Simar (2010).



Powstał również pomysł na konstrukcję estymatora zgodnego miary efektywności/nieefektywności, który nie wymaga przyjmowania kłopotliwego założenia wypukłości zbioru  $T$ . Wykorzystano tzw. metodę FDH będącą modyfikacją metody analizy otoczki danych. Zbadane zostały własności tego estymatora oraz zaproponowano odpowiednią aproksymację zbioru  $T$  — szczegóły dostępne np. w pracy: Prędkie (2010c). Dzięki temu stało się również możliwe testowanie założenia o wypukłości zbioru możliwości produkcyjnych, które jest przyjmowane m.in. w jednoproduktowym modelu Bankera — zob. Simar i Wilson (2011), rozdz. 5.2.

## BIBLIOGRAFIA

- Afriat S. N. (1972), *Efficiency estimation of production functions*, International Economic Review, 13, s. 568–598.
- Aigner D. J., Chu S. F. (1968), *On estimating the industry production function*, American Economic Review, 58, s. 826–839.
- Banker R. D. (1993), *Maximum Likelihood, Consistency and Data Envelopment Analysis: A Statistical Foundation*, Management Science, 39, s. 1265–1273.
- Banker R. D. (1996), *Hypothesis tests using Data Envelopment Analysis*, Journal of Productivity Analysis, 7, s. 139–159.
- Banker R. D., Chang H. (1995), *A simulation study of hypothesis tests for differences in efficiencies*, International Journal of Production Economics, 39, s. 37–54.
- Banker R. D., Charnes A., Cooper W. W. (1984), *Some models for estimating technical and scale inefficiencies in DEA*, Management Science, 30, s. 1078–1091.
- Banker R. D., Conrad R. F., Strauss R. P. (1986), *A comparative application of Data Envelopment Analysis and translog methods: an illustrative study of hospital production*, Management Science, 32, s. 30–44.
- Engelking R. (1976), *Topologia ogólna*, PWN Warszawa.
- Kumbhakar S. C., Lovell C. A. K. (2000), *Stochastic frontier analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Osiewalski J., Wróbel-Rotter R. (2002), *Bayesowski model efektów losowych w analizie efektywności kosztowej (na przykładzie elektrowni i elektrociepłowni polskich)*, Przegląd Statystyczny, 50, s. 47–68.
- Park B. U., Jeong S., Simar L. (2010), *Asymptotic distribution of conical-hull estimators of directional edges*, Annals of Statistics, 38, s. 1320–1340.
- Prędkie A. (2003), *Analiza efektywności za pomocą metody DEA: podstawy formalne i ilustracja ekonomiczna*, Przegląd Statystyczny, 50, s. 87–100.
- Prędkie A. (2006), *Definiowanie globalnego i lokalnego efektu skali w ramach badania efektywności metodą DEA*, Przegląd Statystyczny, 53, s. 57–72.
- Prędkie A. (2010a), *Własności i zastosowanie estymatorów miar efektywności technicznej Farrella*, Metody i zastosowania badań operacyjnych (red. M. Nowak), Prace Naukowe UE w Katowicach, s. 175–194.
- Prędkie A. (2010b), *Estymacja zbioru możliwości produkcyjnych w ramach formalnego modelu statystycznego*, Przegląd Statystyczny, 57, s. 3–18.
- Prędkie A. (2010c), *Propozycja opisu niepewności w ramach metod DEA i FDH*, Współczesne tendencje rozwojowe badań operacyjnych (red. J. Siedlecki i P. Peternek), Prace Naukowe UE we Wrocławiu nr 108, s. 207–218.

- Prędkie A. (2012a), *Geneza zbiorów możliwości produkcyjnych wykorzystywanych w metodzie DEA*, Zeszyty Naukowe UEP (w druku).
- Prędkie A. (2012b), *Formalne testowanie typu efektu skali w ramach metody DEA*, Zeszyty Naukowe UEP (w druku).
- Richmond J. (1974), *Estimating the efficiency of production*, *International Economic Review*, 15, s. 515–521.
- Schmidt P (1976), *On the Statistical Estimation of Parametric Frontier Production Functions*, *Review of Economics and Statistics*, 58, s. 238–239.
- Simar L., Wilson PW. (2011), *Inference by the m out of n bootstrap in nonparametric frontier models*, *Journal of Productivity Analysis*, 36, s. 33–53.
- Timmer C. P (1971), *Using a probabilistic frontier production function to measure technical efficiency*, *Journal of Political Economy*, 79, s. 767–794.

## WYBRANE ZAGADNIENIA WSPÓŁCZESNEGO MODELOWANIA STRUKTURALNEGO, CZĘŚĆ I: ESTYMOWANE MODELE RÓWNOWAGI OGÓLNEJ W ZARYSIE

RENATA WRÓBEL-ROTTER

Katedra Ekonometrii i Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie  
*e-mail: eewrobel@cyf-kr.edu.pl*

### ABSTRACT

R. Wróbel-Rotter: *Modern structural modelling, part I: estimated general equilibrium models — an overview*. Folia Oeconomica Cracoviensia 2012, 53: 59–83.

The paper presents main building blocks of the estimated general equilibrium models. Models belonging to that class combine in one specification the optimization behavior of consumers and producers with mechanisms that allow to model the nominal and real rigidities observed at the macroeconomic level. Moreover, they allow flexibly to test alternative economic hypotheses. This article contains the first part of the methodology that discusses theoretical assumptions, the second one is devoted to estimation and verification methods and will appear as the continuation article. The goal is to present wide context of their usefulness and highlight methodological challenges.

### STRESZCZENIE

W pracy omówiono podstawowe bloki równań, wynikających z przyjętych układów założeń teoretycznych, tworzące estymowane modele równowagi ogólnej. Stanowią one konstrukcję opartą na mikroekonomicznych zagadnieniach optymalizacyjnych podmiotów gospodarczych, zdefiniowanych w modelu teoretycznym, reguł decyzyjnych i procesów stochastycznych kształtujących dynamikę modelowej gospodarki w czasie, z których następnie otrzymuje się układ równań strukturalnych, w formie nieliniowego systemu racjonalnych oczekiwań. Podstawową grupą podmiotów występujących w modelu są gospodarstwa domowe podejmujące kluczowe decyzje wpływające na kształtowanie się poziomu aktywności w modelowej gospodarce, określając podaż pracy, rodzaj konsumpcji, alokację środków pieniężnych między krajowe i zagraniczne aktywa finansowe, oraz stanowią one jedyne źródło kapitału dla przedsiębiorstw krajowych, ustalając wielkość jego podaży i inwestycji. Decyzje konsumpcyjne i inwestycyjne gospodarstw domowych są opisywane w czasie przez ciąg identycznych zagadnień maksymalizacji użyteczności, niezmiennych dla każdego ze stanów przyszłości, warunkowych względem danego ciągu ograniczeń budżetowych. Prowadzą one do definicji równań Eulera dla konsumpcji, określenia ograniczenia zasobowego

gospodarki i, po zdefiniowaniu procesów stochastycznych kształtujących preferencje w czasie i określających inne zakłócenia losowe, występujące w funkcji użyteczności i ograniczeniu budżetowym, tworzą bezpośrednio równania strukturalne modelu.

Drugą istotną grupą podmiotów występujących w części teoretycznej modelu są przedsiębiorstwa. Sektor produkcyjny ma strukturę dwustopniową, która składa się z przedsiębiorstw wytwarzających produkty pośrednie, wykorzystujących pracę oferowaną przez gospodarstwa domowe i posiadany zasób kapitału, oraz producenta dobra finalnego, który agreguje produkty pośrednie w jednorodny produkt końcowy. Konstrukcja taka ma na celu ujęcie nominalnych opóźnień w reakcji płacy na nieprzewidywalne zmiany warunków zewnętrznych i umożliwić współistnienie w jednym modelu optymalizacyjnych zachowań mikroekonomicznych z obserwowaną na poziomie makroekonomiczną inercją zmiennych. Produkt finalny jest przekazywany gospodarstwom domowym w celach konsumpcyjnych i inwestycyjnych oraz eksporterom, w przypadku modelu gospodarki otwartej. Producent finalny, działający na rynku doskonale konkurencyjnym, wykorzystuje funkcję produkcji, opisaną agregatem o stałej elastyczności substytucji, łącząc produkty pośrednie w jeden agregat. Sektor wytwarzający dobra pośrednie stanowią przedsiębiorstwa działające według zasad konkurencji monopolistycznej: nabywają pracę i wynajmują kapitał od gospodarstw domowych na rynku doskonale konkurencyjnym, wytwarzają niejednorodne dobra pośrednie i sprzedają je producentowi finalnemu. Technologia producentów pośrednich podlega wspólnym, stochastycznym zmianom w czasie i jest najczęściej opisana przez funkcję produkcji Cobba i Douglasa. Optymalne decyzje związane z wielkością produkcji i cenami są ustalane w oparciu o mikroekonomiczne zagadnienia optymalizacyjne: minimalizacji kosztów i maksymalizacji zysku. Model zamykają reguła decyzyjna podmiotu odpowiedzialnego za decyzje monetarne oraz inne równania, w szczególności warunki równoważenia się rynków i ograniczenia zasobowe. Estymowany model równowagi ogólnej jest szczególną konstrukcją, która pozwala przejść od optymalizacyjnych zachowań na poziomie mikroekonomicznym do występujących na poziomie makroekonomicznym inercji poprzez odpowiednie mechanizmy agregujące.

#### KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

Estymowany model równowagi ogólnej, mikroekonomiczne zagadnienia optymalizacyjne, maksymalizacja użyteczności i zysku, minimalizacja kosztów, model racjonalnych oczekiwań

Estimated General Equilibrium model, microeconomic optimisation, utility and profit maximisation, cost minimization, rational expectation model

## 1. WSTĘP

Estymowane modele równowagi ogólnej są obecnie podstawową grupą modeli makroekonomicznych, wywodzących się z teorii ekonomii, które służą analizie wpływu na zmienne makroekonomiczne zakłóceń stochastycznych oraz symulacji możliwych ścieżek rozwoju gospodarek. Są one szeroko wykorzystywane w praktyce, ze względu na elastyczne możliwości rozbudowy i testowania konkurencyjnych teorii ekonomicznych. Celem opracowania, składającego się z dwóch części, jest przedstawienie głównych zagadnień metodologicznych związanych z nurtem strukturalnego modelowania makroekonomicznego, bazującego na estymowanych modelach równowagi ogólnej. Niniejszy artykuł, stanowiący część pierwszą pracy, zawiera ogólną charakterystykę modeli należących do tej klasy i omawia główne bloki tworzące model w postaci struktural-

nej. Zagadnienia związane z estymacją równań, tematami analizy wrażliwości i budowy modeli hybrydowych porusza artykuł następny w tym tomie, zatytułowany: „Wybrane zagadnienia współczesnego modelowania strukturalnego, część II: wnioskowanie w estymowanych modelach równowagi ogólnej”. Rozważania w tekście mają charakter ogólny i stanowią próbę podsumowania i zebrania najważniejszych zagadnień metodologicznych oraz przeglądu bieżącej literatury.

## 2. GENEZA I OGÓLNA CHARAKTERYSTYKA

Strukturalne modele makroekonomiczne, do których należą estymowane modele równowagi ogólnej, mają za zadanie ujęcie dynamiki głównych zmiennych makroekonomicznych w sposób pozostający w zgodzie z teorią ekonomii. Obejmują one m.in. stochastyczne dynamiczne modele równowagi ogólnej (ang. Dynamic Stochastic General Equilibrium, DSGE), dynamiczne modele równowagi ogólnej, (ang. Dynamic General Equilibrium, DGE), i inne modele równowagi ogólnej o charakterze nowokeynesowskim (ang. New-Keynesian General Equilibrium), których cechą wspólną jest to, że ich parametry strukturalne są estymowane na podstawie obserwacji pochodzących z makroekonomicznych szeregów czasowych. Zasadniczą cechą wyróżniającą spośród strukturalnych modeli makroekonomicznych są fundamenty ekonomiczne, na podstawie których są konstruowane związki między zmiennymi występującymi w teoretycznej gospodarce. Modele należące do tej klasy łączą optymalizacyjne decyzje podmiotów gospodarczych na poziomie mikroekonomicznym z obserwowanymi na poziomie makroekonomicznym opóźnieniami w dostosowywaniu się zmiennych w odpowiedzi na zakłócenia stochastyczne, co jest możliwe poprzez konstrukcję odpowiednich mechanizmów agregujących. Z punktu widzenia teorii makroekonomii łączą one idee podejścia nowokeynesowskiego, dopuszczającego niedoskonałości rynków, z nurtem nowoklasycznym zakładającym racjonalność działania gospodarstw domowych i przedsiębiorstw. O cenach i płacach przyjmuje się w modelu założenie nieelastyczności, oznaczające brak natychmiastowej i pełnej reakcji na zmianę warunków zewnętrznych. Modele te nie ujmują bezpośrednio wpływu rynków finansowych na gospodarkę, zakładając ich efektywność, przyjmują zdolność powrotu gospodarki do stanu dynamicznej równowagi i równoważność ricardiańską w polityce fiskalnej. Mając podbudowę w teorii ekonomii umożliwiają one badanie wpływu szeregu czynników na kluczowe zmienne makroekonomiczne, w szczególności mogą ilustrować konsekwencje wystąpienia w gospodarce zakłóceń losowych, pomagać w określeniu determinantów wzrostu gospodarczego, wyjaśniać źródła fluktuacji makroekonomicznych i cyklu koniunkturalnego, analizować mechanizm transmisyjny polityki pieniężnej oraz prognozować efekty zmian polityki gospodarczej. Modele eko-

onomiczne, stanowiące podbudowę teoretyczną estymowanych modeli równowagi ogólnej powstały w odpowiedzi na krytykę stosowanych do końca lat 70. XX wieku wielorównaniowych, strukturalnych modeli popytowych; podsumowanie badań: Fair (1994). Dotyczyła ona m.in. nieodpowiedniego modelowania dynamiki gospodarki, identyfikacji równań behawioralnych i formowania oczekiwań podmiotów gospodarczych w odpowiedzi na zmiany polityki gospodarczej; Lucas (1976). Odpowiedzią było pojawienie się dwóch równoległych nurtów badawczych, z których pierwszy doprowadził do wyłonienia się szerokiej klasy strukturalnych modeli makroekonomicznych; Kydland i Prescott (1982), King, Plosser i Rebelo (1988), Christiano, Eichenbaum i Evans (1999, 2005), natomiast drugi związany był z modelowaniem makroekonomicznych szeregów czasowych za pomocą wektorowej autoregresji; Sims (1980).

Obecnie stosowane w praktyce estymowane modele równowagi ogólnej, ujmujące dynamikę całej gospodarki i wywodzące się z teorii ekonomii, wyłoniły się w efekcie obserwowanej w literaturze ostatniej dekady tendencji zmierzającej do opracowania spójnych ram modelowania makroekonomicznego; omówienie ewolucji przyjmowanych założeń w modelach równowagi ogólnej i przegląd literatury oraz stanu badań zawiera m.in. praca Lane (2001). Próba unifikacji teorii ekonomicznych i ich wykorzystania w badaniach empirycznych doprowadziła do połączenia koncepcji dynamicznych modeli równowagi ogólnej, zakładających równoważące się rynki i racjonalne oczekiwania podmiotów gospodarczych, z koncepcją niedoskonałej konkurencji i nominalnych nieelastyczności występujących w gospodarce; Obstfeld i Rogoff (1995), uogólnienie modelu m.in.: Kim i Kwok (2007). W konsekwencji powstałe modele zaliczane są zarówno do nurtu nowej klasycznej syntezy jak i nazywane bywają nowo-keynesowskimi dynamicznymi modelami równowagi ogólnej, m.in. Goodfriend i King (1997) oraz Rotemberg i Woodford (1997). Modele te głównie stanowiły koncepcje teoretyczne, które po kalibracji parametrów strukturalnych, wykorzystywano m.in. do porównań rezultatów uzyskanych z modeli wektorowej autoregresji i konstrukcji restrykcji ekonomicznych poprawiających jej zdolności prognostyczne; Malley, Muscatelli i Woitek (2005), Ingram i Whiteman (1994). Obserwowane w gospodarce nieprzewidywalne czynniki losowe oraz występowanie innych zakłóceń egzogenicznych spowodowało wprowadzenie do modeli dodatkowych liczących stacjonarnych i niestacjonarnych procesów stochastycznych, co w konsekwencji spowodowało wyłonienie się klasy modeli nazywanych w literaturze stochastycznymi dynamicznymi modelami równowagi ogólnej; Chang i Schorfheide (2003). Zaliczane są one obecnie do nurtu Nowej Makroekonomii Gospodarki Otwartej (ang. New Open Economy Macroeconomics, NOEM); Bergin (2003). Obszerny wstęp do zagadnień estymowanych modeli równowagi ogólnej, dyskusję ich własności oraz możliwości zastosowania przedstawia m.in. Tovar (2008).

Cechą charakterystyczną estymowanych modeli równowagi ogólnej jest zależność parametrów i procesów stochastycznych występujących w równaniach



strukturalnych od parametrów fundamentalnych nie występująca w modelach, w których równania tworzy się poprzez opis zależności między kategoriami makroekonomicznymi, zob. m.in. Fagan, Henry i Mestre (2005) i nowsza wersja Warne, Coenen i Christoffel (2012). W modelu wykorzystuje się założenie, że znaczne i częste zmiany parametrów opisujących preferencje i technologię są mało prawdopodobne, co upoważnia przyjęcie założenia o ich stałości w czasie, bądź stopniowej ewolucji; Pagan (2001). Mikroekonomiczne podstawy na których jest konstruowany model powodują, że bezpośrednio uwzględnia się oczekiwania podmiotów, co do kształtowania się przyszłych warunków gospodarczych oraz mechanizmy ustalania się cen i wydatków konsumpcyjnych co powoduje, że model taki uwzględnia argumenty przedstawione w pracy: Lucas (1976). Bezpośrednie ujęcie w modelu użyteczności gospodarstw domowych może być podstawą do analizy konsekwencji alternatywnych scenariuszy polityki pieniężnej dla konsumentów, m.in. Otrok (2001), Juillard, Karam, Laxton i Pesenti (2006).

Skonstruowanie układu dynamicznego opisującego gospodarkę i jednocześnie wywodzącego się z teorii ekonomii, zawierającego znaczną liczbę niestacjonarnych procesów stochastycznych oraz nominalnych i realnych opóźnień w dostosowywaniu się cen i płac, okazało się mieć kluczowe znaczenie w opisie szeregów makroekonomicznych. Opracowanie metod efektywnej estymacji parametrów strukturalnych oraz możliwość elastycznego formułowania i testowania zróżnicowanych hipotez ekonomicznych przesądziło o ich szerokich możliwościach aplikacyjnych. W zakresie budowy średniej wielkości empirycznych systemów służących modelowaniu polityki pieniężnej za model fundamentalny uważa się system skonstruowany w 2001 roku dla gospodarki zamkniętej, opublikowany w pracy: Christiano, Eichenbaum i Evans (2005). Model ten, wyznaczający obecnie dominujący kierunek badań empirycznych, następnie uogólniono na przypadek ujmujący gospodarkę otwartą i opracowano efektywne, pozwalające na uwzględnienie informacji wstępnej, metody estymacji parametrów strukturalnych. W pierwotnej swojej postaci wywodzi się on z pionierskich prac, takich jak: Obstfeld i Rogoff (1995) oraz Erceg, Henderson i Levin (2000).

Estymowane modele równowagi ogólnej o większej skali niż pierwotne modele teoretyczne znalazły zastosowanie przede wszystkim w instytucjach finansowych o zasięgu międzynarodowym i bankach centralnych: Kortelainen (2002) model opracowany dla 11 krajów strefy euro w Bank of Finland; Black, Cassino, Cassino, Hansen, Hunt, Rose i Scott (1997) oraz Szeto (2002), funkcjonujące w Reserve Bank of New Zealand, przy czym ostatnia praca jest połączeniem obliczeniowego modelu równowagi ogólnej (ang. computational general equilibrium model, CGE) z modelem dynamicznym, reprezentującym ścieżkę dostosowania zmiennych makroekonomicznych do stanu stabilnego, wyznaczonego przez CGE. Z dalszymi pracami należy wymienić: Benigno i Thoenissen (2003) w Bank of England, Smets i Wouters (2005) model dla strefy euro i gospodarki USA, Dib (2003), Bouakez, Cardia i Ruge-Murcia (2002), Moran i Dolar (2002),



Ambler, Dib i Rebei (2003), Coletti, Hunt, Rose i Tetlow (1996) oraz Murchison, Rennison i Zhu (2004) w Bank of Canada, Laxton i Pesenti (2003) w Międzynarodowym Funduszu Walutowym, jako wersja modelu dla gospodarki globalnej opracowanego m.in. pod kierunkiem: Rajan (2004), Lindé, Nessén i Söderström (2009) oraz Adolfson, Laseén, Lindé i Villani (2005b) w szwedzkim Riksbanku, Erceg, Guerrieri i Gust (2005) model SIGMA skonstruowany w Systemie Rezerwy Federalnej, Pytlarczyk (2005) dla gospodarki niemieckiej, Pytlarczyk (2007), Smets i Wouters (2003, 2007), Ratto, Röger, in't Veld i Girardi (2005) oraz Ratto i Röger (2005) dla strefy euro, Breuss i Rabitsch (2009) dla Austrii, Burriel, Fernández-Villaverd i Rubio-Ramírez (2009) dla gospodarki hiszpańskiej, Haider i Khan (2008) dla Pakistanu oraz Gabriel, Levine, Pearlman i Yang (2010) dla Indii. Charakterystyczną cechą powyższych modeli jest to, że stopniowo odchodzi się w nich od metod kalibracji parametrów na rzecz ich formalnej estymacji, najczęściej metodami bayesowskimi, umożliwiającymi, w procesie wnioskowania połączenie informacji wynikającej z teorii ekonomii z danymi empirycznymi. Warto zwrócić uwagę na modele konstruowane i oszacowane w Sveriges Riksbank, w szczególności na model opracowany wspólnie z autorami koncepcji estymacji modeli równowagi ogólnej: Altig, Christiano, Eichenbaum i Lindé (2011), oraz pozostałe: Adolfson (2007), Adolfson, Laseén, Lindé i Villani (2004, 2005a, 2008a, 2008b), Adolfson, Laseén, Lindé, Villani i Svensson (2011) oraz Adolfson, Laseén, Lindé i Villani (2005b). Ostatnia praca przedstawia pierwszy duży model równowagi ogólnej, w pełni estymowany metodami bayesowskimi który, po oszacowaniu na danych polskich, znajduje się również w dyspozycji Narodowego Banku Polskiego, Grabek, Kłos i Utzig-Lenarczyk (2007). Modele estymowane dla danych polskich można znaleźć również w pracach: Kolasa (2008), Brzoza-Brzezina i Makarski (2010) oraz Gradzewicz i Makarski (2009). Strona teoretyczna estymowanych modeli równowagi ogólnej została omówiona m.in. w pracach: Christiano, Trabandt i Walentin (2010), Galí (2008), Colander (2006), Canova (2006), Woodford (2003). Szereg artykułów o charakterze empirycznym traktuje różne aspekty ich konstrukcji i ujęcia zagadnień wpływu decyzji monetarnych na sferę realną i nominalną gospodarki, m.in. Adolfson (2007), Christiano, Eichenbaum i Evans (2005), Clarida, Galí i Gertler (1999, 2000), Evans i Honkapohja (2006), Galí i Monacelli (2005), Kim (2000), Schmitt-Grohé i Uribe (2004a, 2004b, 2005, 2007), Sims (2001, 2002a), Benhabib, Schmitt-Grohé i Uribe (2001b), Galí (2002), Khan, King i Wolman (2003), Levin, Onatski, Williams i Williams (2005), Rabanal (2007), Smets i Wouters (2002), Brzoza-Brzezina, Kolasa i Makarski (2011) oraz Brzoza-Brzezina i Kolasa (2012). Wymienione prace nie wyczerpują powstałych aplikacji estymowanych modeli równowagi ogólnej, natomiast mają zasygnalizować szerokie możliwości ich zastosowania praktycznego i użyteczność w badaniach empirycznych.

Oprócz konstrukcji części teoretycznej modelu ważnym zagadnieniem metodologicznym są metody estymacji jego parametrów. Pierwotnie technikami po-

szukiwania odpowiednich ich wartości była kalibracja, stosowana standardowo w modelowaniu makroekonomicznym. Analiza zdolności modeli kalibrowanych do opisu stylizowanych zależności, występujących w szeregach makroekonomicznych pochodzących z gospodarki USA, wskazuje na potencjalne problemy i potrzebę stosowania w praktyce metod estymacji parametrów strukturalnych, również z możliwością uwzględnienia dodatkowych informacji pochodzących z innych źródeł, m.in. opartych na badaniach mikroekonomicznych; Söderström, Söderlind i Vredin (2002), Kim i Pagan (1999), Kydland i Prescott (1996). Oprócz kalibracji, wykorzystywano również przybliżone techniki estymacji, ustalały wartości parametrów po minimalizacji odległości wybranych funkcji odpowiedzi impulsowych z modelu strukturalnego od analogicznych wielkości w identyfikowalnym modelu wektorowej autoregresji, m.in. Rotemberg i Woodford (1997), Schorfheide (2000), Murchison, Rennison i Zhu (2004), Christiano, Eichenbaum i Evans (2005), Black, Cassino, Cassino, Hansen, Hunt, Rose i Scott (1997) oraz Christiano, Trabandt i Walentin (2010). Nieco rzadziej stosowano również metodę największej wiarygodności, m.in. Ireland (2004), Bouakez, Cardia i Ruge-Murcia (2002) oraz Moran i Dolar (2002).

Estymacja parametrów strukturalnych na gruncie wnioskowania bayesowskiego, która w odróżnieniu od kalibracji wykorzystuje funkcję wiarygodności generowaną przez estymowany model równowagi ogólnej oraz umożliwia uwzględnienie informacji spoza próby, została zaproponowana w pracy: Lubik i Schorfheide (2006). Metody bayesowskie zostały wykorzystane do estymacji parametrów strukturalnych i parametrów opisujących strukturę stochastyczną modeli w pracach: Smets i Wouters (2003) oraz Adolfson, Laseén, Lindé i Villani (2005b). Zastosowanie metod wnioskowania bayesowskiego można uważać za kontynuację koncepcji bayesowskiej kalibracji i prac bezpośrednio prezentującymi możliwości jej praktycznego wykorzystania; Canova (1994), DeJong, Ingram i Whiteman (1996, 2000) oraz Geweke (1999). Strona numeryczna estymacji bayesowskiej jest realizowana z wykorzystaniem technik Monte Carlo opartych na łańcuchach Markowa (ang. Markov Chain Monte Carlo, MCMC) i, sporadycznie, metod Monte Carlo z funkcją ważności; De Jong, Ingram i Whiteman (2000) oraz An i Schorfheide (2007). Więcej na temat własności stosowanych algorytmów i oceny ich zbieżności można znaleźć w pracach: Chib (1995), Cowles i Carlin (1996), Brooks i Gelman (1998), Geweke (1992), Tierney (1994), Gamerman (1997), O'Hagan (1994). W praktyce najczęściej stosuje się algorytm Metropolis'a i Hastingsa, w którym wartość oczekiwana gęstości próbnej jest zmienna i ustalana na poziomie ostatniego zaakceptowanego stanu łańcucha Markowa (ang. random walk Metropolis-Hastings); Adolfson, Laseén, Lindé i Villani (2005b), Smets i Wouters (2007), oraz książki: Marin i Christian (2007), Tanner (1996). Metody Monte Carlo są stosowane zarówno do aproksymacji brzegowych rozkładów *a posteriori* parametrów jak i przybliżania brzegowych gęstości obserwacji, niezbędnych w procesie porównywania modeli, Rabanal i Rubio-Ramírez (2005a, 2005b).

Estymowane modele równowagi ogólnej stosowane w praktyce, charakteryzujące się dużą skalą, zapewniają lepszy opis zależności występujących w rzeczywistej gospodarce, posiadają szereg rozbudowanych założeń i są zazwyczaj opracowywane dla kilku sektorów gospodarki, co skutkuje ich znaczną złożonością operacyjną i trudnościami ze szczegółowym omówieniem wszystkich przyjmowanych założeń. Wybrane zagadnienia metodologiczne stanowiły temat analiz we wcześniejszych pracach autorki: wprowadzenie w tematykę: Wróbel-Rotter (2007b, 2007c), szczegóły wyprowadzenia równań strukturalnych przykładowego modelu: Wróbel-Rotter (2011a, 2011c, 2012e), omówienie zagadnień estymacji i metod numerycznych: Wróbel-Rotter (2007a, 2008, 2012b, 2012f), prezentacja technik oceny stabilności rozwiązania i zależności między parametrami postaci strukturalnej i zredukowanej: Wróbel-Rotter (2011b, 2012c) oraz opis metody budowy hybrydowego modelu wektorowej autoregresji: Wróbel-Rotter (2012a, 2012d).

Całość zagadnień metodologicznych można podzielić na następujące, zasadnicze części:

1. Specyfikacja mikroekonomicznych zagadnień optymalizacyjnych i reguł decyzyjnych podmiotów występujących w modelu, definicja procesów stochastycznych określających dynamikę zakłóceń stochastycznych, zapisanie ograniczeń zasobowych oraz innych równań występujących w części teoretycznej modelu.
2. Analityczne rozwiązanie zagadnień optymalizacyjnych konsumentów i producentów oraz zapisanie warunków pierwszego rzędu, które wraz z pozostałymi równaniami określają postać strukturalną modelu, tworzącego formę nieliniowego systemu racjonalnych oczekiwań.
3. Linearyzacja równań modelu wyrażonych dla zmiennych zapisanych w formie odchyleń od ich wartości odpowiadających stabilnemu stanowi modelu. Możliwe jest pozostawienie modelu w formie nieliniowej, co wymaga zastosowania innych metod jego rozwiązywania i estymacji, znacznie podnoszących stopień skomplikowania numerycznego aplikacji.
4. Przekształcenie systemu zlinearyzowanych równań strukturalnych w postać zredukowaną i zapisanie ich reprezentacji w formie przestrzeni stanów, składającej się z równania przejścia, otrzymanego po rozwiązaniu postaci zlinearyzowanej, oraz równania obserwacji, definiującego powiązanie zmiennych endogenicznych, występujących w modelu teoretycznym, ze zmiennymi obserwowanymi.
5. Estymacja parametrów strukturalnych modelu na podstawie jego reprezentacji w przestrzeni stanów, na którą się składają: specyfikacja rozkładu *a priori*, konstrukcja funkcji wiarygodności, przyjęcie odpowiednich metod numerycznych, w szczególności zastosowanie algorytmu Metropolis i Hastingsa, oraz ocena jego zbieżności.

6. Zastosowanie modelu w analizach: symulacji wariantów decyzji gospodarczych, prognozowania zmiennych makroekonomicznych i oceny przebiegu funkcji odpowiedzi impulsowych, porównań z rezultatami otrzymanymi na podstawie konkurencyjnych specyfikacji.
7. Dodatkowa weryfikacja, pozwalająca na uzyskanie wglądu w zależności występujące w modelu, poprzez zastosowanie narzędzi analizy wrażliwości, badanie obszarów stabilności rozwiązania, dyskusję stopnia poprawności specyfikacji zagadnień optymalizacyjnych i równań strukturalnych, itp.
8. Zastosowanie w konstrukcji innych modeli ekonometrycznych, w tym połączenia z wektorową autoregresją, umożliwiające większą elastyczność w dopasowywaniu się do danych empirycznych, i ich wykorzystanie jako punktu odniesienia do porównań z innymi modelami.

### 3. MODEL W POSTACI STRUKTURALNEJ

Estymowane modele równowagi ogólnej stanowią konstrukcje oparte na mikroekonomicznych zagadnieniach optymalizacyjnych podmiotów gospodarczych występujących w modelu teoretycznym, reguł decyzyjnych i procesów stochastycznych kształtujących dynamikę modelowej gospodarki w czasie, z których następnie otrzymuje się układ równań strukturalnych, w formie nieliniowego systemu racjonalnych oczekiwań. Model zbudowany na gruncie teorii ekonomii ma za zadanie opisać kształtowanie się najważniejszych szeregów makroekonomicznych, takich jak stopa wzrostu PKB, inflacja cenowa i płacowa, stopa procentowa, inwestycje, import i export. Na mocy konstrukcji, wnioskowanie w modelach należących do tej klasy, polega na określeniu wartości parametrów fundamentalnych, charakteryzujących podmioty występujące w modelowej gospodarce i jej własności dynamiczne, na podstawie ograniczonego zbioru zagregowanych szeregów czasowych. Mając na uwadze cel, jakiemu ma służyć budowany model, należy rozważyć w procesie jego konstrukcji, jakie szeregi makroekonomiczne zostaną przyjęte do estymacji, jakie uwzględnić założenia o mechanizmach kształtujących ceny i płace, przyjęć kształt preferencji i rodzaj technologii oraz zadecydować jakie metody rozwiązywania i estymacji parametrów strukturalnych zostaną wykorzystane. Ogólny opis głównych bloków zagadnień optymalizacyjnych i reguł decyzyjnych, pozwalający na nakreślenie procesu budowy estymowanych modeli równowagi ogólnej oraz zaprezentowanie schematu powstawania równań strukturalnych, został opracowany na podstawie przeglądu dostępnej literatury, w głównej mierze dotyczącej modeli stosowanych w bankach centralnych.

## 4. GOSPODARSTWA DOMOWE

Sektor konsumentów stanowi *continuum* gospodarstw domowych, o nieskończonym horyzoncie życia, których liczba jest indeksowa przez  $j \in (0,1)$ . Podejmują one kluczowe decyzje wpływające na kształtowanie się poziomu aktywności w modelowej gospodarce, określając podaż pracy, rodzaj konsumpcji, alokację środków pieniężnych między krajowe i zagraniczne aktywa finansowe, oraz stanowią one jedyne źródło kapitału dla przedsiębiorstw krajowych, ustalając wielkość jego podaży i inwestycji. Decyzje konsumpcyjne i inwestycyjne gospodarstw domowych są opisywane w czasie przez ciąg identycznych zagadnień maksymalizacji użyteczności, niezmiennych dla każdego ze stanów przyszłości, warunkowych względem danego ciągu ograniczeń budżetowych. Preferencje  $j$ -tego gospodarstwa domowego wyrażają się przyjętą postacią analityczną chwilowej funkcji użyteczności  $U(\cdot)$ , której argumentami są najczęściej: wielkość konsumpcji  $C_t(j)$ , podaż pracy  $H_t(j)$  i wartość realnych zasobów pieniężnych  $Q_t(j)$ . Optymalne decyzje są podejmowane po maksymalizacji oczekiwanej, nieskończonej sumy zdyskontowanych użyteczności, warunkowej względem ciągu ograniczeń budżetowych:

$$E_0^{(j)} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t(j), H_t(j), Q_t(j); \xi_t^u, \theta_u),$$

gdzie  $E_0$  jest operatorem wartości oczekiwanej warunkowej względem zbioru informacji posiadanej przez konsumenta w momencie początkowym,  $\beta$  jest czynnikiem dyskontującym, wspólnym dla całej gospodarki,  $\theta_u$  grupuje parametry występujące w funkcji użyteczności, natomiast  $\xi_t^u$  zawiera egzogeniczne procesy stochastyczne, wpływające na kształtowanie się użyteczności w czasie. Obejmuje on wszystkie zmienne losowe opisujące nieprzewidywalną zmienność czynników realnych wpływających na argumenty funkcji użyteczności, do których można zaliczyć m.in. zmienność w gustach gospodarstw domowych związaną z poziomem konsumpcji czy też ilością oferowanej pracy, Woodford (2003). Argumenty i postać analityczna funkcji użyteczności, zależą od przyjętych w modelu założeń; najczęściej są to funkcje o stałej awersji do ryzyka i ich uogólnienia, (ang. Constant Rate of Risk Aversion, CRRA): Erceg, Guerrieri i Gust (2005), Lindé, Nessén i Söderström (2009), Benigno i Thoenissen (2003) oraz Smets i Wouters (2003, 2007). Możliwe jest ich połączenie z postaciami logarytmicznymi; Adolfson, Laséen, Lindé i Villani (2005b). Niekiedy są przyjmowane funkcje o stałej elastyczności substytucji, jak również możliwe jest uchylenie warunku nieskończonego horyzontu życia gospodarstw domowych; Kortelainen (2002).

Funkcje użyteczności, w modelach wykorzystywanych w praktyce, mogą uwzględniać dodatkowe cechy, opisujące kształtowanie się decyzji konsumentów. Poprzez wprowadzenie opóźnionej zmiennej  $C_{t-1}(j)$ , modeluje się inercję



zachowań konsumpcyjnych i zasadę kształtowania przyzwyczajeń (ang. habit formation), oznaczającą zmianę poziomu i rodzaju własnej konsumpcji na skutek wygładzania jej poziomu w czasie oraz systematycznego dostosowywania do obserwowanej konsumpcji innych gospodarstw domowych, według zasady „dorównać Kowalskim” (ang. catching up with the Joneses). Obecność w funkcji użyteczności realnych zasobów pieniężnych modeluje koszty transakcyjne, związane z utrzymywaniem pewnego zasobu pieniądza nie przynoszącego dochodu oraz, w sposób pośredni, ujmuje nieelastyczności, występujące w gospodarce, związane z koniecznością zawierania transakcji (ang. transactions frictions). Przyjmujemy standardowe założenia dotyczące funkcji użyteczności  $U(\cdot)$ : dla dowolnej realizacji wektora zakłóceń  $\xi_t$  jest to funkcja wklęsła i silnie rosnąca względem konsumpcji  $i$ , dodatkowo, addytywnie separowalna względem podaży pracy i zasobów pieniężnych, m.in. Varian (1992), Mas-Colell, Whinston i Greene (1995). Kontrowersje związane z nazewnictwem funkcji  $U(\cdot)$  (niekiedy nazywana jest ona „niebezpośrednią” funkcją użyteczności), dyskusja konsekwencji uchylenia poszczególnych założeń oraz ich wpływ na istnienie i określoność równowagi w modelu została zawarta m.in. w pracy Woodford (2003).

Ograniczenie budżetowe  $j$ -tego gospodarstwa domowego, w kolejnych momentach  $t$ , zawiera dodatkową informację na temat kształtowania się przepływów aktywów w modelowanej gospodarce. Jest ono zapisywane w formie prezentującej sposoby alokacji zasobów między: gotówkę  $M_t(j)$ , portfel aktywów finansowych  $B_t(j)$  i wydatki konsumpcyjne  $S_t(j)$ , oraz wskazującej źródła ich pochodzenia, na które składają się: całkowite dochody z pracy  $W_t(j)$  i dochody z aktywów  $D_t(j)$ , pomniejszone o podatki  $T_t(j)$ :

$$M_t(j) + B_t(j) + S_t(j) \leq W_t(j) + D_t(j) - T_t(j),$$

przy czym w modelach wykorzystywanych w praktyce konstruuje się znacznie bardziej rozbudowane ograniczenia budżetowe, uwzględniające ponadto: niepewność związaną z przychodem od aktywów finansowych, odpowiednie stopy podatkowe, koszt kapitału, koszt zmiany wielkości i stopnia wykorzystania kapitału, wydatki inwestycyjne gospodarstw domowych, transfery i inne zmienne wynikające z przyjętych założeń modelowych; Adolfson, Laseén, Lindé i Villani (2005b), Erceg, Guerrieri i Gust (2005), Murchison, Rennison i Zhu (2004), Benigno i Thoenissen (2003), Smets i Wouters (2003, 2007), Laxton i Pesenti (2003), Kortelainen (2002) oraz Black, Cassino, Cassino, Hansen, Hunt, Rose i Scott (1997).

Ograniczenie budżetowe zapisywane jest podczas optymalizacji w formie równości ze względu na założenie racjonalności działania gospodarstw domowych i przyjmowany jest warunek wyznaczający granicę zadłużenia, eliminujący schemat Ponziego, Woodford (2003). Rozwiązanie zagadnienia maksymalizacji funkcji użyteczności przy ciągu ograniczeń budżetowych prowadzi do warunków pierwszego rzędu, w formie równań Eulera, obrazujących optymalne decy-

zje gospodarstwa domowego dla każdego momentu czasu w zakresie ustalania wielkości konsumpcji, podaży pracy i kapitału, portfela aktywów oraz pozostałych zmiennych w zależności od specyfikacji.

Oddzielnym zagadnieniem jest ujęcie w sposób modelowy rynku pracy. W zależności od sformułowania części teoretycznej modelu jest on traktowany jako doskonale konkurencyjny, w sytuacji przyjęcia założenia jednorodności gospodarstw domowych, bądź też może być uważany za konkurencję monopolistyczną, w przypadku niejednorodności konsumentów, określanej przez niepowtarzalność posiadanych przez nich kwalifikacji. Modelowanie nominalnych nieelastyczności płac uzyskuje się po wprowadzeniu do procesu ich ustalania mechanizmu inercyjnego i założeniu określania wysokości wynagrodzenia przez konsumentów w oparciu o rozwiązanie zagadnienia maksymalizacji użyteczności. Mechanizm inercyjny implikuje, że w danym momencie jedynie frakcja gospodarstw domowych rozwiązuje zagadnienie optymalizacyjne, natomiast pozostała część uaktualnia stawkę płacy w oparciu o przyjętą regułę indeksacyjną, zawierającą m.in. bieżący wskaźnik inflacji i oczekiwaną inflację w okresie następnym. Literatura traktująca o sposobach modelowania rynku pracy jest niezwykle bogata, dlatego zostaną wymienione tutaj niektóre z prac, modelujące płace w kontekście estymowanych modeli równowagi ogólnej: Adolfson, Laseén, Lindé i Villani (2005b), Adolfson, Lindé i Villani (2005c), Smets i Wouters (2002, 2003, 2005, 2007), Rabanal i Rubio-Ramírez (2005b), Benigno i Thoenissen (2003), Christiano, Eichenbaum i Evans (2005), Altig, Christiano, Eichenbaum i Lindé (2011), Breuss i Rabitsch (2009) oraz Ratto, Röger, in't Veld i Girardi (2005).

## 5. SEKTOR PRODUKCYJNY

Sektor produkcyjny ma strukturę dwustopniową, która składa się z przedsiębiorstw wytwarzających produkty pośrednie, wykorzystujących pracę oferowaną przez gospodarstwa domowe i posiadany zasób kapitału, oraz producenta dobra finalnego, który agreguje produkty pośrednie  $Y_t(i)$  w jednorodny produkt końcowy  $Y_t$ . Możliwe jest również zdefiniowanie w modelu dodatkowego podmiotu, którego celem jest przekształcenie niejednorodnej podaży pracy, oferowanej przez monopolistyczne gospodarstwa domowe, w jednorodny czynnik produkcji, wykorzystywany w procesie produkcji przedsiębiorstw pośrednich. Konstrukcja taka ma na celu ujęcie nominalnych opóźnień w reakcji płacy na nieprzewidywalne zmiany warunków zewnętrznych, por. m.in. Adolfson, Laseén, Lindé i Villani (2005b). Produkt finalny jest przekazywany gospodarstwom domowym w celach konsumpcyjnych i inwestycyjnych, jeśli są one właścicielami kapitału w przedsiębiorstwach pośrednich, oraz eksporterom, w przypadku modelu gospodarki otwartej. Producent finalny, działający na rynku doskonale konkurencyjnym, wykorzystuje funkcję produkcji opisaną agregatem CES, o stałym efek-



cie skali, łączącym *continuum* produktów pośrednich i opisanym standardowo przez indeks postaci, Dixit i Stiglitz (1977):

$$Y_t = \left[ \int_0^1 Y_t(i)^{\frac{1}{\lambda}} di \right]^{\lambda}$$

gdzie  $1 \leq \lambda \leq \infty$  oznacza współczynniki agregacji, możliwie zmienne w czasie.

Ceny  $P_t(i)$  nakładów  $Y_t(i)$  w procesie produkcji dobra finalnego, ustalone niezależnie przez monopolistycznych producentów pośrednich, są zadane egzogenicznie dla producenta finalnego, podobnie jak cena  $P_t$  produktu finalnego, która wynika z rozwiązania zagadnienia minimalizacji kosztu całkowitego. Na jego podstawie uzyskuje się również funkcje popytu na dobra pośrednie  $Y_t(i)$ , warunkowe względem danej technologii, cen produktu  $P_t$  i cen nakładów  $P_t(i)$ . Opisują one zapotrzebowanie producenta finalnego na poszczególne dobra pośrednie w zależności od ich ceny, charakteryzują się stałą elastycznością cenową popytu i jednorodnością stopnia pierwszego względem produktu finalnego. Cena dobra finalnego ma postać indeksu CES i jest wyprowadzana po uwzględnieniu w funkcji produkcji zapotrzebowania na dobra pośrednie.

Sektor wytwarzający dobra pośrednie stanowi *continuum* przedsiębiorstw, indeksowanych przez  $i \in (0,1)$ , działających według zasad konkurencji monopolistycznej, bez możliwości wejścia i wyjścia z rynku. Przedsiębiorstwa pośrednie nabywają pracę i wynajmują kapitał od gospodarstw domowych na rynku doskonale konkurencyjnym, wytwarzają niejednorodne dobra pośrednie, ustalają ich cenę i sprzedają je producentom finalnym. Technologia producentów pośrednich, podlegająca wspólnym i systematycznym zmianom w czasie, jest opisana przez funkcję produkcji:

$$Y_t(i) = f(K_t(i), H_t(i); \xi_t^p, \theta_p)$$

gdzie  $K_t(i)$  jest ilością kapitału wykorzystywanego w procesie produkcji  $i$ -tego przedsiębiorstwa pośredniego,  $H_t(i)$  oznacza jednorodny nakład pracy,  $f(\cdot)$  jest najczęściej funkcją Cobba i Douglasa, o stałym efekcie skali,  $\xi_t^p$  zawiera zmienne losowe ujmujące wzrost poziomu technologii i losowe zakłócenia w jej poziomie,  $\theta_p$  oznacza parametry występujące w funkcji produkcji i procesach losowych. Całkowity zasób kapitału fizycznego może się różnić od rzeczywistych jego nakładów, ze względu na czynione w niektórych modelach założenia zmiennego jego wykorzystania, m.in. Adolfson, Laseén, Lindé i Villani (2005b) oraz Baxte i Farr (2005).

Przedsiębiorstwa pośrednie optymalizują decyzje, dotyczące zapotrzebowania na czynniki produkcji, rozwiązując zagadnienie minimalizacji kosztu całkowitego, warunkowe względem zadanych egzogenicznie, przez producentów

dóbr finalnych, funkcji popytu na ich dobra oraz, ustalanych przez gospodarstwa domowe, cen kapitału i pracy. Swoje zobowiązania płacowe regulują oni z funduszy własnych oraz zaciągając kredyty, co prowadzi do określenia związku między nominalną stopą procentową w gospodarce a kosztami pracy w przedsiębiorstwie. Zagadnienie minimalizacji kosztu w  $i$ -tym przedsiębiorstwie pośrednim, w momencie  $t$ , można zapisać w ogólnej postaci:

$$\min_{K_t(i), H_t(i)} (w_H H_t(i) + w_K K_t(i)), \text{ przy warunku: } f(K_t(i), H_t(i); \xi_t^p, \theta_p) = Y_t^*(i),$$

gdzie  $w_H$  oznacza cenę jednostkową pracy, która jest związana ze stopą procentową płaconą przez przedsiębiorstwa od pożyczek finansujących wynagrodzenia, zaś  $w_K$  jest stopą procentową po której wynajmowany jest kapitał od gospodarstw domowych.

Obserwowane na poziomie makroekonomicznym opóźnienia w reakcji cen na zmianę warunków zewnętrznych ujmuje się w modelu poprzez wprowadzenie określonych dodatkowych mechanizmów agregacji zmiennych, utrzymując przy tym założenia optymalizacji decyzji na poziomie mikroekonomicznym. W procesie określania cen dóbr pośrednich uwzględnia się dodatkowe mechanizmy inercyjne, z których najczęściej stosowany zaproponowano w pracy Calvo (1983). Inne schematy ustalania cen i ich wpływ na zdolność modelu do opisu danych empirycznych przedstawia m.in. Laforte (2005). Mechanizm inercyjny polega na ograniczeniu częstotliwości optymalizacji decyzji w czasie dla grupy przedsiębiorstw pośrednich. Szansa swobodnego i niezależnego od przeszłości ustalenia ceny przez podmiot zadana jest przez rozkład Bernoulliego, którego parametr określa w każdym momencie ułamek jednostek mogących dokonać ponownej optymalizacji ceny, natomiast pozostałe przedsiębiorstwa uaktualniają jej poziom według ustalonej reguły indeksacyjnej, najczęściej wprowadzając korektę o wskaźnik inflacji. Nowa cena sprzedaży dobra pośredniego w momencie  $t$ , uwzględniająca ryzyko braku możliwości jej optymalizacji w przyszłości, otrzymywana jest w wyniku maksymalizacji oczekiwanej teraźniejszej wartości przyszłych zysków, warunkowej względem egzogenicznej funkcji popytu. Warunki pierwszego rzędu, z tak zdefiniowanego problemu optymalizacyjnego, są wykorzystywane do sformułowania zagregowanej krzywej Phillipsa.

W rozbudowanych modelach dla gospodarek otwartych analogiczne zagadnienia optymalizacyjne są rozwiązywane przez przedsiębiorstwa prowadzące wymianę zagraniczną. *Continuum* eksporterów nabywa jednorodne dobro finalne na rynku krajowym, które transformuje w zróżnicowane dobra eksportowe, sprzedawane następnie zagranicznym gospodarstwom domowym. Modelowa transformacja polega na nadaniu mu odpowiedniej marki (ang. brand naming) powodującej, że każdy z eksporterów jest jedynym dostawcą danego produktu na rynku międzynarodowym. Najczęściej dopuszcza się również istnienie niepełnego dostosowania cenowego na skutek zmian kursu walutowego

(ang. incomplete exchange rate pass-through) oraz krótkookresowych odchyśleń od prawa jednej ceny zarówno w sektorze eksportowym jak i importowym; Christiano, Eichenbaum i Evans (2005), Adolfson, Laseén, Lindé i Villani (2005b) oraz Ambler, Dib i Rebei (2003). Cena dobra eksportowanego jest ustalana po uwzględnieniu ceny dobra krajowego, określającej koszt krańcowy produkcji, relacji ceny własnej do zagregowanej ceny eksportowej, wynikającej z funkcji popytu na dane dobro, oraz niepewności co do możliwości przyszłej jej optymalizacji, według mechanizmu Calvo (1983). Eksporterzy, którzy w danym momencie nie mogą rozwiązać zagadnienia maksymalizacji zysku, przy danej funkcji popytu na swoje produkty, mogą ustalić nową cenę sprzedaży poprzez indeksowanie dotychczasowej wskaźnikiem inflacji dóbr eksportowych. Sektor importowy najczęściej składa się z dwóch kategorii przedsiębiorstw nabywających jednorodny produkt na rynku międzynarodowym i przekształcający go odpowiednio w dobra konsumpcyjne i inwestycyjne, sprzedawane następnie gospodarstwom domowym na rynku krajowym. Cena sprzedaży dóbr jest ustalana podobnie jak w przypadku eksporterów poprzez rozwiązanie zagadnienia maksymalizacji zysku i uwzględnienie schematu Calvo (1983).

## 6. POLITYKA PIENIĘŻNA I RÓWNOWAGA

Funkcję decydenta monetarnego w estymowanych modelach równowagi ogólnej pełni bank centralny, którego decyzje w modelu są opisywane za pomocą ustalonej reguły decyzyjnej, opisującej bieżący poziom stopy procentowej w funkcji jej opóźnienia  $r_{t-1}$ , oraz takich zmiennych jak: odchylenia wskaźnika inflacji  $\pi_t$  od jego wartości referencyjnej, (celu inflacyjnego, poziomu w stanie stabilnym), luki popytowej  $y_t$ , niekiedy realnego kursu walutowego,  $e_t$ :

$$r_t = f(r_{t-1}, \pi_t, y_t, e_t; \xi_t^r, \theta_r),$$

gdzie  $\theta_r$  oznacza wektor parametrów reguły pieniężnej, zaś  $\xi_t^r$  zawiera zakłócenia losowe.

Polityka pieniężna w modelach równowagi ogólnej ma wpływ na zmienne realne najczęściej poprzez kanał stopy procentowej, kursu walutowego oraz kapitału wykorzystywanego w przedsiębiorstwach (ang. working capital channel). Alternatywne specyfikacje reguł decyzyjnych wraz z omówieniem ich wpływu na gospodarkę można znaleźć m.in. w pracy Woodford (2003). Dyskusję zagadnień wygładzania stopy procentowej przedstawili m.in. Belaygorod, Chib i Dueker (2005). Szczegółowe omówienie kanałów transmisyjnych polityki pieniężnej w sferę realną gospodarki można znaleźć m.in. w pracy: Mishkin (1996). Specyfikacja reguły decyzyjnej i uwzględnienie w niej dodatkowych procesów stochastycznych umożliwia badanie wpływu zakłóceń związanych z realizacją

polityki pieniężnej na zmienne realne. Luka popytowa, występująca w równaniu reguły decyzyjnej banku centralnego, może być mierzona odchyleniami obserwowanej produkcji od wartości wynikającej z trendu w gospodarce, maksymalnej produkcji możliwej do uzyskania, bądź jako odchylenia od wielkości produkcji przy giętkich cenach, m.in. Adolfson, Laseén, Lindé i Villani (2005b), Smets i Wouters (2003).

Model jest systemem w którym teoretyczna gospodarka pozostaje w stanie równowagi w danym momencie czasu, jeśli wszystkie zdefiniowane rynki pozostają zrównoważone, w sensie zrównania się wielkości popytu i podaży. Jej zapewnienie wymaga jednoczesnego zrównoważenia się rynków dóbr i rynków finansowych, uwzględnienia ograniczeń zasobowych gospodarki oraz warunków pierwszego rzędu wynikających z zagadnień optymalizacyjnych. Jeśli popyt zgłaszany przez gospodarstwa domowe, decydena fiskalnego oraz eksporterów jest zrównoważony przez krajową produkcję dobra finalnego oraz import inwestycyjny i konsumpcyjny, to istnieje równowaga na krajowym rynku dóbr. Rynek finansowy znajduje się w równowadze, jeśli popyt na kredyty zgłaszany przez przedsiębiorstwa, w celu realizacji ich zobowiązań płacowych, jest równy podaży depozytów przez gospodarstwa domowe powiększonej o ilość pieniądza wprowadzonego do gospodarki przez bank centralny. Analogicznie zapewnia się równowagę na pozostałych, zdefiniowanych w modelu rynkach. Decyzje fiskalne w gospodarce są ujmowane w sposób zwięzły, poprzez specyfikację procesów egzogenicznych dla wydatków budżetowych bądź ich opis systemem wektorowej autoregresji; Ambler, Dib i Rebei (2003), Adolfson, Laseén, Lindé i Villani (2005b).

Oddzielnym zagadnieniem jest kształtowanie się równowagi w czasie, mającej charakter dynamiczny. Model jest systemem równań, które opisują równowagę dynamiczną rozumianą jako zbiór procesów stochastycznych spełniających odpowiednie układy równań, przy założonym kształtowaniu się procesów egzogenicznych. Ścieżkę równowagi gospodarki opisują ilościowo ograniczenia zasobowe i budżetowe, warunki pierwszego rzędu zagadnień optymalizacyjnych, reguły decyzyjne banku centralnego oraz pozostałe równania tworzące nieliniowy system, zawierający opóźnione i oczekiwane wartości zmiennych makroekonomicznych, procesy stochastyczne oraz inne wielkości występujące w modelu. Może ona być również uzyskana po zapisaniu reprezentacji modelu w przestrzeni stanów, w której ewolucja zmiennych stanu jest opisana równaniem przejścia, o parametrach związanych z parametrami fundamentalnymi modelu, i kształtowana jest przez ciąg egzogenicznych, niezależnych zmiennych losowych (innowacji). Równania strukturalne modelu tworzą nieliniowy system racjonalnych oczekiwań, który w zależności od założeń może nie posiadać stabilnej trajektorii równowagi, można wskazać jedno rozwiązanie (ang. determinacy) bądź kilka (ang. indeterminacy). Omówienie problemów istnienia lokalnej i globalnej równowagi dynamicznej oraz jej określoność w rozważanej klasie modeli

jest analizowana m.in. w pracach: Woodford (2003), Lubik i Schorfheide (2003, 2004), Benhabib, Schmitt-Grohé i Uribe (2001a) oraz Beyer i Farmer (2004).

## 7. METODY ROZWIĄZYWANIA MODELI

Najwcześniej konstruowane estymowane modele równowagi ogólnej, w których występowały pełne i natychmiastowe dostosowania cenowe, spełniały warunek Pareto optymalności, co umożliwiało zastosowanie metod programowania dynamicznego do rozwiązania nieliniowego zagadnienia optymalizacyjnego sformułowanego w modelu (ang. social planner problem), tzw. metody iterowania funkcji wartości (ang. value function iteration), z wykorzystaniem aproksymacji kwadratowych; Kydland i Prescott (1982), omówienie m.in. Hansen i Prescott (1995), Anderson, Hansen, McGrattan i Sargent (1996), Canova (2006) oraz Ljungqvist i Sargent (2000), Stokey, Lucas i Prescott (1989) oraz Heer i Maussner (2005). Obecnie dopuszczają one możliwość wystąpienia restrykcji w mikroekonomicznych zagadnieniach decyzyjnych podmiotów gospodarczych, w postaci ograniczenia budżetowego konsumentów i ograniczenia częstości optymalizacji ich decyzji w czasie, oraz przyjmują założenia konkurencji monopolistycznej w sferze przedsiębiorstw. Powoduje to utratę przez modelową gospodarkę cech optymalności w sensie Pareto i konieczność stosowania, do wyznaczenia postaci zredukowanego modelu, metod bazujących na równaniach Eulera.

Fundamentalną metodą rozwiązywania estymowanych modeli równowagi ogólnej jest algorytm stosowany do liniowych systemów równań różnicowych, w sytuacji występowania zmiennych wyrażonych w formie oczekiwanych przyszłych wartości (ang. general linear difference models), który zaproponowali Blanchard i Kahn (1980); wykorzystywany był on m.in. w pracach: Bouakez, Cardia i Ruge-Murcia (2002) oraz Dib (2003). Metoda ta zakłada liniową aproksymację funkcji przejścia i jej stosowanie wydaje się być uzasadnione w przypadku, kiedy istnieją przesłanki do założenia liniowej ewolucji gospodarki w czasie. Propozycje kolejnych algorytmów miały za zadanie przyspieszenie strony numerycznej i uszczegółowienie techniki obliczeniowej, w zależności od postaci analitycznej modelu, m.in. prace: Anderson i Moore (1985), Klein (1997), Zadzorny (1998), Söderlind (1999), Sims (2002b), Zagaglia (2005) i Uhlig (1999). W przypadku niewielkich modeli można zastosować metodę nieokreślonych współczynników (ang. Undetermined Coefficients), zob. m.in. Uhlig (1999) oraz Taylor i Uhlig (1990).

Metody nieliniowe umożliwiają precyzyjniejszą aproksymację funkcji przejścia i obejmują m.in. metodę perturbacji, zaproponowaną w pracy Judd i Guu (1997), którą następnie rozwinęli Judd (2003) i Juillard (2002). Metoda perturbacji polega na rozwinięciu funkcji przejścia w szereg Taylora wokół niestochastycznego stanu stabilnego modelu a następnie wyznaczaniu współczynników



aproksymacji. Zapewnia ona lepsze przybliżenie funkcji przejścia niż metody liniowe, m.in. poprzez uwzględnienie momentów wyższych rzędów rozkładów zakłóceń strukturalnych, i może być stosowana w szerszej klasie modeli, które nie spełniają warunku optymalności Pareto. Dokładność aproksymacji może zostać zwiększona po uwzględnieniu wyrazów wyższego rzędu w szeregu Taylora, Schmitt-Grohé i Uribe (2004c), Chen i Zadrozny (2005). Własności metody perturbacji i porównania z alternatywnymi technikami rozwiązywania modeli racjonalnych oczekiwań zostały omówione m.in. przez: Aruoba, Fernández-Villaverde i Rubio-Ramírez (2006). Spośród dostępnych metod należy wymienić nieco rzadziej stosowane w praktyce metody globalne, takie jak aproksymacje wielomianami Chebyszewa, metody skończonych elementów i inne, Aruoba, Fernández-Villaverde i Rubio-Ramírez (2006), Novales, Dominguez, Perez i Ruiz (2003).

## 8. PODSUMOWANIE

Estymowane modele równowagi ogólnej są konstrukcją złożoną z określonych bloków równań, wynikających z przyjętych układów założeń teoretycznych. Podstawową grupą podmiotów występujących w modelu są gospodarstwa domowe podejmujące kluczowe decyzje związane z poziomem konsumpcji i podażą pracy, po rozwiązaniu mikroekonomicznego zagadnienia maksymalizacji użyteczności przy ograniczeniu budżetowym. Drugą istotną grupą podmiotów są przedsiębiorstwa, które składają się z sektora wytwórców dóbr pośrednich oraz producenta dobra finalnego, agregującego produkty pośrednie. Optymalne decyzje związane z wielkością produkcji i cenami są ustalane w oparciu o mikroekonomiczne zagadnienia optymalizacyjne: minimalizacji kosztów i maksymalizacji zysku. Model zamykają reguła decyzyjna podmiotu odpowiedzialnego za decyzje monetarne oraz inne równania, w szczególności warunki równoważenia się rynków i ograniczenia zasobowe. Estymowany model równowagi ogólnej jest szczególną konstrukcją, która pozwala przejść od optymalizacyjnych zachowań na poziomie mikroekonomicznym do występujących na poziomie makroekonomicznym inercji poprzez odpowiednie mechanizmy agregujące.

## BIBLIOGRAFIA

- Adolfson M. (2007), *Incomplete exchange rate pass-through and simple monetary policy rules*, Journal of International Money and Finance 26.
- Adolfson M., Laseén S., Lindé J., Villani M. (2004), *The role of sticky prices in an open economy DSGE model: A Bayesian investigation*, Journal of the European Economic Association 2.
- Adolfson M., Laseén S., Lindé J., Villani M. (2005a), *Are constant interest rate forecasts modest policy interventions? Evidence from a dynamic open economy model*, International Finance 8.

- Adolfson M., Laseén S., Lindé J., Villani M. (2005b), *Bayesian estimation of an open economy DSGE model with incomplete pass-through*, *Journal of International Economics*, 72.
- Adolfson M., Laseén S., Lindé J., Villani M. (2008a), *Empirical properties of closed and open economy DSGE models of the Euro Area*, *Macroeconomic Dynamics* 12.
- Adolfson M., Laseén S., Lindé J., Villani M. (2008b), *Evaluating an estimated New Keynesian small open economy model*, *Journal of Economic Dynamics and Control* 32.
- Adolfson M., Laseén S., Lindé J., Villani M., Svensson L. E. O. (2011), *Optimal monetary policy in an operational medium-sized DSGE model*, *Journal of Money, Credit and Banking* 43.
- Adolfson M., Lindé J., Villani M. (2005c), *Forecasting performance of an open economy Dynamic Stochastic General Equilibrium model*, *Money Macro and Finance (MMF) Research Group Conference 2005* 32.
- Altig D. E., Christiano L. J., Eichenbaum M., Lindé J. (2011), *Firm-specific capital, nominal rigidities, and the business cycle*, *Review of Economic Dynamics*, 14.
- Ambler S., Dib A., Rebei N. (2003), *Nominal rigidities and exchange rate pass-through in a structural model of a small open economy*, *Bank of Canada Working Paper 03-29*, Bank of Canada.
- An S., Schorfheide F. (2007), *Bayesian analysis of DSGE models*, *Econometric Review* 26.
- Anderson E. W., Hansen L. P., McGrattan E. R., Sargent T. (1996), *On the mechanics of forming and estimating dynamic linear economies*, in: *Handbook of Computational Economics 1*, (red.: D. A. K. Hans, M. Amman i J. Rust), North-Holland.
- Anderson G. S., Moore G. (1985), *A linear algebraic procedure for solving linear perfect foresight models*, *Economic Letters* 17.
- Aruoba S. B., Fernández-Villaverde J., Rubio-Ramírez J. F. (2006), *Comparing solution methods for dynamic equilibrium economies*, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 30(12).
- Baxte M., Farr D. D. (2005), *Variable capital utilization and international business cycles*, *Journal of International Economics* 65.
- Belaygorod A., Chib S., Dueker M. (2005), *Discrete monetary policy changes and changing inflation targets in estimated DSGE models*, *Review, Federal Reserve Bank of St. Louis*, issue Nov.
- Benhabib J., Schmitt-Grohé S., Uribe M. (2001a), *Monetary policy and multiple equilibria*, *American Economic Review* 91.
- Benhabib J., Schmitt-Grohé S., Uribe M. (2001b), *The perils of Taylor rules*, *Journal of Economic Theory* 96.
- Benigno G., Thoenissen C. (2003), *Equilibrium exchange rates and supply side performance*, *Economic Journal* 113.
- Bergin PR. (2003), *Putting the New Open Macroeconomics to a test*, *Journal of International Economics* 60.
- Beyer A., Farmer R. E. A. (2004), *On the indeterminacy of New-Keynesian economics*, *Computing in Economics and Finance*, 152.
- Black R., Cassino V., Cassino A., Hansen E., Hunt B., Rose D., Scott A. (1997), *The forecasting and policy system: the core model*, *Reserve Bank of New Zealand, Research Paper* 43.
- Blanchard O. J., Kahn C. M. (1980), *The solution of linear difference models under linear expectations*, *Econometrica*, 48.
- Bouakez H., Cardia E., Ruge-Murcia F.J. (2002), *Habit formation and the persistence of monetary shocks*, *Journal of Monetary Economics* 52.
- Breuss F., Rabitsch K. (2009), *An estimated two-country DSGE model of Austria and the Euro Area*, *Empirica* 36.
- Brooks S.P., Gelman A. (1998), *General methods for monitoring convergence of iterative simulations*, *Journal of Computational and Graphical Statistics* 7.
- Brzoza-Brzezina M., Kolasa M. (2012), *Bayesian evaluation of DSGE models with financial frictions*, *National Bank of Poland Working Paper* 109.



- Brzoza-Brzezina M., Kolasa M., Makarski K. (2011), *The anatomy of standard DSGE models with financial frictions*, National Bank of Poland Working Paper 80.
- Brzoza-Brzezina M., Makarski K. (2010), *Credit Crunch in a Small Open Economy*, National Bank of Poland Working Paper 75.
- Burriel P., Fernández-Villaverde J., Rubio-Ramírez J. F. (2009), *MEDEA: A DSGE Model for the Spanish Economy*, SERIES Journal of the Spanish Economic Association 1.
- Calvo G. (1983), *Staggered prices in a utility-maximizing framework*, Journal of Monetary Economics 12.
- Canova F. (1994), *Statistical inference in calibrated models*, Journal of Applied Econometrics 9.
- Canova F. (2006), *Methods for applied macroeconomic research*, Princeton University Press, Princeton.
- Chang Y., Schorfheide F. (2003), *Labour supply shifts and economic fluctuations*, Journal of Monetary Economics 50.
- Chen B., Zadrozny P. (2005), *Multi-Step Perturbation Solution of Nonlinear Rational Expectations Models*, Computing in Economics and Finance, 254.
- Chib S. (1995), *Understanding Metropolis Hastings algorithm*, Journal of the American Statistical Association 90.
- Christiano L. J., Eichenbaum M., Evans C. (1999), *Monetary policy shocks: What have we learned and to what end?*, w: Handbook of Macroeconomics 1A, (red.: M. Woodford i J. Taylor), Amsterdam: Elsevier Science, North-Holland.
- Christiano L. J., Eichenbaum M., Evans C. (2005), *Nominal rigidities and the dynamic effects of a shock to monetary policy*, Journal of Political Economy 113.
- Christiano L. J., Trabandt T., Walentin K. (2010), *DSGE models for monetary policy analysis*, Handbook of monetary economics (red. B.M. Friedman, M. Woodford) 3, Elsevier.
- Clarida R., Gali J., Gertler M. (1999), *The science of monetary policy: a New Keynesian perspective*, Journal of Economic Literature XXXVII.
- Clarida R., Gali J., Gertler M. (2000), *Monetary policy rules and macroeconomic stability: Evidence and some theory*, Quarterly Journal of Economics CXV.
- Colander D. (2006), *Post Walrasian macroeconomics. Beyond the Dynamic Stochastic General Equilibrium model*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Coletti D., Hunt B., Rose D., Tetlow R. (1996), *The dynamic model: QPM*, Bank of Canada Technical Report 1996-75.
- Cowles M. K., Carlin B. P. (1996), *Markov Chain Monte Carlo convergence diagnostics: A comparative review*, Journal of the American Statistical Association 91.
- De Jong D. N., Ingram B. F., Whiteman C. H. (2000), *A Bayesian approach to dynamic macroeconomic*, Journal of Econometrics 98.
- DeJong D. N., Ingram B. F., Whiteman C. H. (1996), *A Bayesian approach to calibration*, Journal of Business Economics and Statistics 14.
- DeJong D. N., Ingram B. F., Whiteman C. H. (2000), *A Bayesian approach to dynamic macroeconomic*, Journal of Econometrics 98.
- Dib A. (2003), *An estimated Canadian DSGE model with nominal and real rigidities*, Canadian Journal of Economics 36.
- Dixit A. K., Stiglitz J. (1977), *Monopolistic competition and optimum product diversity*, American Economic Review 67.
- Erceg C. J., Guerrieri L., Gust C. (2005), *SIGMA: A New open economy model for policy analysis*, International Finance Discussion Papers 835.
- Erceg C. J., Henderson D.W., Levin A.T. (2000), *Optimal monetary policy with staggered wage and price contracts*, Journal of Monetary Economics, 46.
- Evans G. W., Honkapohja S. (2006), *Monetary Policy, Expectations and Commitment*, Scandinavian Journal of Economics 108(1),.

- Fagan G., Henry J., Mestre R. (2005), *An Area-Wide model (AWM) for the Euro Area*, Economic Modelling 22.
- Fair R. (1994), *Testing macroeconomic models*, Cambridge, Harvard University Press.
- Gabriel V., Levine P., Pearlman J., Yang B. (2010), *An estimated DSGE model of the Indian economy*, School of Economics Discussion Papers 1210, University of Surrey.
- Gali J. (2002), *New perspectives on monetary policy, inflation, and the business cycle*, NBER Working Paper 8767.
- Gali J. (2008), *Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework*, Princeton University Press, Princeton.
- Gali J., Monacelli T. (2005), *Monetary Policy and Exchange Rate Volatility in a Small Open Economy*, Review of Economic Studies 72.
- Gamerman D. (1997), *Markov Chain Monte Carlo. Stochastic simulation for Bayesian inference*, Chapman and Hall, London.
- Geweke J. (1992), *Evaluating the accuracy of sampling — based approaches to the calculation of posterior moments*, w: Bayesian Statistics 4 (red.: J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid, A. F. M. Smith), Oxford University Press, Oxford.
- Geweke J. (1999), *Computational experiments and reality*, Computing in Economics and Finance 401.
- Goodfriend M., King R. (1997), *The new neoclassical synthesis and the role of monetary policy*, NBER Macroeconomic Annual 12.
- Grabek G., Klos B., Utzig-Lenarczyk G. (2007), *SOE-PL — model DSGE małej otwartej gospodarki estymowany na danych polskich*, Materiały i Studia NBP 217.
- Gradzewicz M., Makarski K. (2009), *The macroeconomic effects of losing autonomous monetary policy after the Euro adoption in Poland*, Narodowy Bank Polski, Materiały i Studia 58.
- Haider A., Khan U. S. (2008), *A Small Open Economy DSGE Model for Pakistan*, The Pakistan Development Review 47.
- Hansen G., Prescott E. (1995), *Recursive Methods for Computing Equilibria of Business Cycle Models*, Frontiers of Business Cycle Research, (red.: T. F. Cooley), Princeton.
- Heer B., Maussner A. (2005), *Dynamic General Equilibrium modelling. Computational methods and applications*, Springer, Berlin.
- Ingram B. F., Whiteman C.H. (1994), *Supplanting Minnesota prior. Forecasting macroeconomic time series using real business cycle model priors*, Journal of Monetary Economics, 34.
- Ireland P.N. (2004), *A method for taking models to the data*, Journal of Economics Dynamic & Control, 28.
- Judd K. L. (2003), *Perturbation methods and change of variable transformations*, Computing in Economics and Finance 239.
- Judd K. L., Guu S. M. (1997), *Asymptotic methods for aggregate growth models*, Journal of Economic Dynamics and Control 21.
- Juillard M. (2002), *Perturbation method at order k: A recursive algorithm*, Computing in Economics and Finance 257.
- Juillard M., Karam P., Laxton D., Pesenti P. (2006), *Welfare-based monetary policy rules in an estimated DSGE model of the US economy*, European Central Bank Working Paper 613.
- Khan A., King R. G., Wolman A. L. (2003), *Optimal monetary policy*, Review of Economic Studies 70.
- Kim J. (2000), *Constructing and estimating a realistic optimizing model of monetary policy*, Journal of Monetary Economics 45.
- Kim J., Kwok Y. K. (2007), *Higher-Order Properties of the 'Exchange Rate Dynamics Redux' Model*, Computational Economics 30.
- Kim J., Pagan A. R. (1999), *The econometric analysis of calibrated macroeconomic models*, w: Handbook of applied econometrics (red.: M. H. Pesaran i M. R. Wickens), Blackwell Publishers Ltd.

- King R. G., Plosser C., Rebelo S. (1988), *Production, growth and business cycles: I and II*, Journal of Monetary Economics 21.
- Klein P (1997), *Using the generalized Schur form to solve a system of linear expectational difference equations*, Papers on the macroeconomics and fiscal policy, Monograph series 33, Stockholm University.
- Kolasa M. (2008), *Structural heterogeneity or asymmetric shocks? Poland and the euro area through the lens of a two-country DSGE model*, Narodowy Bank Polski.
- Kortelainen M. (2002), *EDGE: a model of the Euro Area with applications to monetary policy*, Bank of Finland Studies E:23.
- Kydland F, Prescott E. (1982), *Time to build and aggregate fluctuations*, Econometrica 50.
- Kydland F, Prescott E. (1996), *The computational experiment: an econometric tool*, Journal of Economic Perspective 10.
- Laforte J. F. (2005), *Pricing models: A Bayesian DSGE approach for the US economy*, Journal of Money, Banking and Credit 39.
- Lane P R. (2001), *The New Open Economy Macroeconomic: A survey*, Journal of International Economics 54.
- Laxton D., Pesenti P (2003), *Monetary rules for small, open, emerging economies*, Journal of Monetary Economics 50.
- Levin A. T., Onatski A., Williams J. C., Williams N. (2005), *Monetary policy under uncertainty in micro-founded macroeconomic models*, Computing in Economics and Finance 478.
- Lindé J., Nessén M., Söderström U. (2009), *Monetary policy in an estimated open-economy model with imperfect pass-through*, International Journal of Finance and Economics 14.
- Ljungqvist L., Sargent T (2000), *Recursive macroeconomic theory*, MIT Press.
- Lubik T, Schorfheide F (2003), *Computing sunspot equilibria in linear rational expectations models*, Journal of Economic Dynamics & Control 28.
- Lubik T, Schorfheide F (2004), *Testing for indeterminacy: An application to US monetary policy*, American Economic Review 94.
- Lubik T, Schorfheide F (2006), *A Bayesian look at New Open Economy Macroeconomics*, NBER Macroeconomic Annual 20.
- Lucas R. E. J. (1976), *Econometric policy evaluation: a critique*, w: The Phillips Curve and Labor Markets, (red.: K. Brunner and A. H. Meltzer), Amsterdam: North-Holland.
- Malley J. R., Muscatelli V. A., Woitek U. (2005), *Real business cycles, sticky wages or sticky prices? The impact of technology shocks on US manufacturing*, European Economic Review 49.
- Marin J. M., Christian P R. (2007), *Bayesian core: A practical approach to computational Bayesian statistics*, Springer, New York.
- Mas-Colell A., Whinston M. D., Greene J.R. (1995), *Microeconomic theory*, Oxford University Press, New York.
- Mishkin F S. (1996), *The channels of monetary transmission: Lessons for monetary policy*, NBER Working Paper 5464.
- Moran K., Dolar V. (2002), *Estimated DGE models and forecasting accuracy: A preliminary investigation with Canadian Data*, Bank of Canada Working Paper 2002-18.
- Murchison S., Rennison A., Zhu Z. (2004), *A structural small open-economy model for Canada*, Bank of Canada Working Paper 2004-4.
- Novales A., Dominguez E., Perez J., Ruiz J. (2003), *Solving nonlinear rational expectations models by eigenvalue — eigenvector decompositions*, Computational Methods for the Study of Dynamic Economies, (red.: R. Marimon and A. Scott), Oxford University Press, Oxford, UK.
- O'Hagan A. (1994), *Bayesian inference*, Edward Arnold, London.
- Obstfeld M., Rogoff K. (1995), *Exchange Rate Dynamics Redux*, Journal of Political Economy 103.
- Otrok C. (2001), *On measuring the welfare cost of business cycles*, Journal of Monetary Economics 47.

- Pagan A. (2001), *Report on modeling and forecasting at the Bank of England*, Report to the Court of Directors of the Bank of England.
- Pytlarczyk E. (2005), *An estimated DSGE model for the German economy*, Computing in Economics and Finance 318.
- Pytlarczyk E. (2007), *Construction and Bayesian estimation of DSGE models for the Euro area- a statistical framework*, VDM Verlag, Berlin.
- Rabanal P (2007), *Does inflation increase after a monetary policy tightening? Answers based on an estimated DSGE model*, Journal of Economic Dynamics and Control 31.
- Rabanal P, Rubio-Ramírez J. F. (2005a), *Comparing New Keynesian models in the Euro Area: A Bayesian approach*, Journal of Monetary Economics 52.
- Rabanal P, Rubio-Ramírez J. F. (2005b), *Comparing New Keynesian models of the Business cycle: A Bayesian approach*, Journal of Monetary Economics, 52.
- Rajan R. (2004), *GEM: A new international macroeconomic model*, International Monetary Fund, Research Department.
- Ratto M., Røger W (2005), *An estimated open-economy model for the EURO area*, Computing in Economics and Finance 84.
- Ratto M., Røger W, in't Veld J., Girardi R. (2005), *An estimated New-Keynesian dynamic stochastic general equilibrium model of the Euro area*, European Economy — Economic Paper 220.
- Rotemberg J., Woodford M. (1997), *An optimization based econometric framework for the evaluation of monetary policy*, NBER Macroeconomic Annual 12.
- Schmitt-Grohé S., Uribe M. (2004a), *Optimal fiscal and monetary policy under sticky prices*, Journal of Economic Theory 114.
- Schmitt-Grohé S., Uribe M. (2004b), *Optimal operational monetary policy in the Christiano-Eichenbaum-Evans model of the U.S. business cycle*, NBER Working Paper 10724.
- Schmitt-Grohé S., Uribe M. (2004c), *Solving dynamic general equilibrium models using a second-order approximation to the policy function*, Journal of Economic Dynamics & Control 28.
- Schmitt-Grohé S., Uribe M. (2005), *Optimal fiscal and monetary policy in a medium scale macro model*, Computing in Economics and Finance 476.
- Schmitt-Grohé S., Uribe M. (2007), *Optimal simple and implementable monetary and fiscal rules*, Journal of Monetary Economics 54.
- Schorfheide F. (2000), *Loss function based evaluation of DSGE models*, Journal of Applied Econometrics 15.
- Sims C. A. (1980), *Macroeconomics and reality*, Econometrica 48.
- Sims C. A. (2001), *A review of monetary policy rules*, Journal of Economic Literature 39.
- Sims C. A. (2002a), *The role of models and probabilities in the monetary policy process*, Brookings Papers on Economic Activity 2.
- Sims C. A. (2002b), *Solving linear rational expectations models*, Computational Economics 20.
- Smets F, Wouters R. (2002), *Openness, imperfect exchange rate pass-through and monetary policy*, Journal of Monetary Economics 49.
- Smets F, Wouters R. (2003), *An estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium model of the Euro Area*, Journal of the European Economic Association 1.
- Smets F, Wouters R. (2005), *Comparing shocks and frictions in US and Euro Area business cycles: A Bayesian DSGE approach*, Journal of Applied Econometrics 20.
- Smets F, Wouters R. (2007), *Shocks and frictions in US business cycles: A Bayesian DSGE approach*, American Economic Review 97.
- Söderlind P (1999), *Solution and estimation of RE macromodels with optimal policy*, European Economic Review 43.
- Söderström U., Söderlind P, Vredin P (2002), *Can a calibrated New-Keynesian model of monetary policy fit the facts?*, Sveriges Riksbank, Working Paper Series 147.

- Stokey N. L., Lucas E., Prescott E. (1989), *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press, England.
- Szeto K. L. (2002), *A Dynamic Computable General Equilibrium (CGE) model of the New Zealand economy*, New Zealand Treasury Working Paper 02/07.
- Tanner M. A. (1996), *Tools for Statistical Inference*, Springer.
- Taylor J. B., Uhlig H. (1990), *Solving nonlinear stochastic growth models: A comparison of alternative solution methods*, Journal of Business and Economic Statistics 8.
- Tierney L. (1994), *Markov chains for exploring posterior distributions (with discussion)*, Annals of Statistics 22.
- Tovar C. (2008), *DSGE models and central banks*, Economics — The open-access, Open-assessment E-Journal, Kiel Institute for the World Economy, 3.
- Uhlig H. (1999), *A toolkit for analyzing nonlinear dynamic stochastic models easily*, w: Computational Methods for the Study of Dynamic Economies, (red.: R. Marimón i A. Scott), Oxford University Press, Oxford, UK.
- Varian A.H. (1992), *Microeconomics analysis*, Third Edition, WW Norton, New York.
- Warne A., Coenen G., Christoffel K. (2012), *Forecasting with DSGE-VAR Models*, rękopis — Directorate General Research, European Central Bank.
- Woodford M. M. (2003), *Interest and prices. Foundations of a theory of monetary policy*, Princeton University Press.
- Wróbel-Rotter R. (2007a), *Dynamic Stochastic General Equilibrium Models: Structure and Estimation, Modelling Economies in Transition 2006*, (red.: Welfe W, Wdowiński P), Łódź.
- Wróbel-Rotter R. (2007b), *Dynamiczne Stochastyczne Modele Równowagi Ogólnej: zarys metodologii badań empirycznych*, Folia Oeconomica Cracoviensia, tom 48.
- Wróbel-Rotter R. (2007c), *Dynamiczny Stochastyczny Model Równowagi Ogólnej: przykład dla gospodarki polskiej*, Przegląd Statystyczny nr 3, tom 54.
- Wróbel-Rotter R. (2008), *Bayesian estimation of a Dynamic General Equilibrium model*, w: Metody Ilościowe w Naukach Ekonomicznych, Ósme Warsztaty Doktorskie z zakresu Ekonometrii i Statystyki, red. A. Welfe, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie.
- Wróbel-Rotter R. (2011a), *Empiryczne modele równowagi ogólnej: gospodarstwa domowe i producent finalny*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, seria Ekonomia, nr 869.
- Wróbel-Rotter R. (2011b), *Obszary stabilności rozwiązania empirycznych modeli równowagi ogólnej: zastosowanie metod analizy wrażliwości*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, seria Metody analizy danych, nr 873.
- Wróbel-Rotter R. (2011c), *Sektor producentów pośrednich w empirycznym modelu równowagi ogólnej*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, seria Ekonomia, nr 872.
- Wróbel-Rotter R. (2012a), *Analiza stopnia zgodności z danymi empirycznymi estymowanego modelu równowagi ogólnej* rękopis — złożone do druku w ZNUEK, seria Ekonomia.
- Wróbel-Rotter R. (2012b), *Empiryczne modele równowagi ogólnej: zagadnienia numeryczne estymacji bayesowskiej*, ZN UEK Metody analizy danych, 878.
- Wróbel-Rotter R. (2012c), *Empiryczne modele równowagi ogólnej: zastosowanie metody dekompozycji funkcji do oceny zależności między postacią strukturalną i zredukowaną*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, seria Metody Analizy Danych, (złożone do druku).
- Wróbel-Rotter R. (2012d), *Estymowane modele równowagi ogólnej i wektorowa autoregresja: model hybrydowy*, rękopis — złożone do druku w Bank i Kredyt.
- Wróbel-Rotter R. (2012e), *Struktura empirycznego modelu równowagi ogólnej dla niejednorodnych gospodarstw domowych*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, seria Ekonomia, 879.

- Wróbel-Rotter R. (2012f), *Wybrane zagadnienia współczesnego modelowania strukturalnego, część II: wnioskowanie w estymowanych modelach równowagi ogólnej*, *Folia Oeconomica Cracoviensia*, tom 53.
- Zadrozny P. (1998), *An eigenvalue method of undetermined coefficients for solving linear rational expectations models*, *Journal of Economic Dynamics and Control* 22.
- Zagaglia P. (2005), *Solving rational-expectations models through the Anderson-Moore algorithm: An introduction to the Matlab implementation*, *Computational Economics* 26.



## WYBRANE ZAGADNIENIA WSPÓŁCZESNEGO MODELOWANIA STRUKTURALNEGO, CZĘŚĆ II: WNIOSKOWANIE W ESTYMOWANYCH MODELACH RÓWNOWAGI OGÓLNEJ

RENATA WRÓBEL-ROTTER

Katedra Ekonometrii i Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie  
*e-mail: eewrobel@cyf-kr.edu.pl*

### ABSTRACT

R. Wróbel-Rotter: *Modern structural modelling, part II: inference in estimated general equilibrium models*. *Folia Oeconomica Cracoviensia* 2012, 53: 85–106.

The paper presents methods of estimation and evaluation of general equilibrium models, highlights problematic fields and challenges. After definition of preferences, technology and structural shocks model's equations, derived by solving microeconomic optimization problems, are loglinearised and the rational expectation solution is found. The next important step is the connection of theoretical variables with the observed counterparts that allows to construct the likelihood. Estimation, verification and numerical convergence plays crucial role in the overall goodness of the model. A general equilibrium model can also be used to construct hybrid vector autoregression that allows to test degree of its misspecification.

### STRESZCZENIE

W pracy omówiono podstawowe zagadnienia związane z rozwiązywaniem, estymacją, weryfikacją i stabilnością numeryczną empirycznych modeli równowagi ogólnej. Zasygnalizowano możliwość ich wykorzystania do budowy hybrydowych modeli wektorowej autoregresji, które umożliwiają ocenę stopnia poprawności i potwierdzenia przez obserwacje założeń ekonomicznych przyjętych w części teoretycznej modelu. Estymowany model równowagi ogólnej jest zbiorem warunków pierwszego rzędu, zagadnień optymalizacyjnych podmiotów zdefiniowanych w części teoretycznej i warunków równowagi, zapisywanych w postaci jednej funkcji wektorowej, warunkowej względem parametrów strukturalnych, która tworzy nieliniowy, dynamiczny system racjonalnych oczekiwań, podlegający loglinearyzacji i rozwiązaniu. Stabilność rozwiązania liniowego implikuje liczne, trudne do określenia restrykcje w przestrzeni parametrów strukturalnych, które mogą stanowić przyczynę problemów numerycznych w czasie estymacji. Estymacja parametrów strukturalnych wymaga połączenia danych, pochodzących z makroekonomicznych szeregów czasowych, ze zmiennymi endogenicznymi, zdefiniowanymi w konstrukcji teoretycznej modelu,



poprzez równanie obserwacji, stanowiące podstawę konstrukcji funkcji wiarygodności. Liniowe rozwiązanie modelu zapisuje się w formie reprezentacji w przestrzeni stanów, na podstawie której możliwe jest skonstruowanie funkcji wiarygodności, wykorzystując filtr Kalmana, ze względu na nieobserwowalny charakter niektórych zmiennych stanu.

Estymacja parametrów strukturalnych jest najczęściej dokonywana poprzez techniki wnioskowania bayesowskiego, które wykorzystują kompletny system warunków pierwszego rzędu, ograniczeń zasobowych i reguł decyzyjnych. Metody bayesowskie pozwalają na skonstruowanie jednej miary określającej stopień dopasowania modelu do danych empirycznych, w postaci brzegowej gęstości obserwacji, umożliwiające formalne porównywanie modeli w obrębie danej klasy bądź też z uwzględnieniem wektorowej autoregresji. Możliwe jest również połączenie wiedzy z różnych specyfikacji. Kluczową rolę w ocenie jakości modelu pełni jego weryfikacja, na którą składa się ocena poprawności funkcjonowania algorytmów numerycznych, w szczególności procedury Metropolis i Hastingsa, oraz analiza wrażliwości pozwalająca na uzyskanie pewnego wglądu w zależności między parametrami w konstrukcji teoretycznej. Sposób rozwiązywania i liniowej aproksymacji modeli równowagi ogólnej nie umożliwia określenia bezpośredniego powiązania parametrów postaci strukturalnej z parametrami postaci zredukowanej, które determinują wnioski ekonomiczne uzyskiwane na podstawie modelu. Powoduje to, że charakterystyka takiego związku wymaga zastosowania dodatkowych metod, w szczególności technik stosowanych w analizie wrażliwości.

Oddzielnym zagadnieniem jest stopień poprawności specyfikacji modelu, w szczególności poprawnego określenia relacji strukturalnych w gospodarce, przyjęcia odpowiednich założeń funkcyjnych dla preferencji konsumentów i technologii, nieuwjęcia zależności nieliniowych, czy też poprawności specyfikacji procesów stochastycznych. Estymowany model równowagi ogólnej jest konstrukcją teoretyczną łączącą w jednym systemie teorię makroekonomii i mikroekonomii, co powoduje że wszelkie wielkości opisujące gospodarkę i prognozy są wynikiem założonej w modelu teorii i struktury procesów stochastycznych. Z tego względu metody badania stopnia zgodności przyjętych założeń z danymi empirycznymi stanowią szerokie pole badawcze. Jednym ze sposobów jej testowania jest budowa hybrydowych modeli wektorowej autoregresji, w których model równowagi ogólnej jest przyjmowany do generowania rozkładu a priori dla wektorowej autoregresji szacowanej dla danych obserwowanych. Stopień niezgodności przyjętych założeń ekonomicznych z danymi empirycznymi ujawnia się poprzez określone wartości parametru wagiowego. Pracę podsumowuje wskazanie obszarów, w których potencjalnie mogą wystąpić problemy w trakcie wykorzystywania estymowanych modeli równowagi ogólnej w praktyce.

#### KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

Estimated General Equilibrium model, rational expectation solutions, Bayesian inference, Metropolis Hastings algorithm, numerical convergence, sensitivity analysis, hybrid vector autoregression

Estymowany model równowagi ogólnej, model racjonalnych oczekiwań, wnioskowanie Bayesowskie, algorytm Metropolis i Hastingsa, numeryczna zbieżność, analiza wrażliwości, hybrydowa wektorowa autoregresja

## 1. WSTĘP

Estymowane modele równowagi ogólnej są złożoną konstrukcją teoretyczną, ujmującą szereg konkurencyjnych założeń ekonomicznych, które mogą zostać poddane formalnemu testowaniu na gruncie empirycznym. Stosowanie modelu do analiz ekonomicznych wymaga jego oszacowania i pełnej weryfikacji, które mają

określić jak dobrze model odzwierciedla relacje zachodzące w realnej gospodarce. Celem niniejszej pracy jest kontynuacja omówienia zagadnień metodologicznych związanych z estymowanymi modelami równowagi ogólnej, ze szczególnym uwzględnieniem aspektów ekonometrycznych: estymacji, weryfikacji, stabilności numerycznej i analizy wrażliwości. Całość pracy podsumowuje prezentacja możliwości budowy modeli hybrydowych, będących propozycją połączenia modeli strukturalnych z giętkością wektorowej autoregresji. Rozważania w tekście mają charakter ogólny i stanowią próbę podsumowania i zebrania najważniejszych zagadnień metodologicznych. Artykuł niniejszy stanowi kontynuację opracowania: „Wybrane zagadnienia współczesnego modelowania strukturalnego, część I: estymowane modele równowagi ogólnej w zarysie”, poprzedniego w tym tomie.

## 2. METODY ROZWIĄZYWANIA MODELI STRUKTURALNYCH

Estymowany model równowagi ogólnej jest zbiorem warunków pierwszego rzędu, zagadnień optymalizacyjnych podmiotów zdefiniowanych w części teoretycznej, i warunków równowagi, zapisywanych w postaci jednej funkcji wektorowej, warunkowej względem parametrów strukturalnych  $\theta$ , która tworzy nieliniowy, dynamiczny system racjonalnych oczekiwań:

$$E_t[f(y_{t+1}^{(+)}, y_t^{(+)}, y_{t-1}^{(-)}, \varepsilon_t; \theta)] = 0,$$

gdzie  $\varepsilon_t$  jest wektorem innowacji związanych z procesami stochastycznymi opisującymi kształtowanie się egzogenicznych zakłóceń losowych w postaci strukturalnej, o którym zakładamy:  $E(\varepsilon_t) = 0$  i  $E(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \Sigma_\varepsilon$ ,  $\theta$  zawiera wszystkie parametry fundamentalne  $\theta_u$  i  $\theta_p$ , parametry występujące w pozostałych równaniach, w tym  $\theta_r$ , oraz parametry opisujące procesy stochastyczne zdefiniowane w części teoretycznej modelu, do których należą m.in.  $\xi_t^u$ ,  $\xi_t^p$  i  $\xi_t^r$ , operator  $E_t(\cdot)$  oznacza wartość oczekiwaną, warunkową względem zbioru informacji w momencie  $t$ , natomiast  $y_t^{(+)}$  oznacza wektor wszystkich zmiennych endogenicznych,  $y_{t+1}^{(+)}$  określa podzbiór  $y_t^{(+)}$  zawierający zmienne występujące w postaci ich wartości oczekiwanych w momencie  $(t+1)$ , nazywanych zmiennymi antycypacyjnymi, w pierwszej polskiej pracy z zakresu estymowanych modeli równowagi ogólnej, Grabek, Kłos i Utzig-Lenarczyk (2007). Wektor  $y_{t-1}^{(-)}$  grupuje zmienne endogeniczne występujące w formie opóźnień rzędu jeden; zakłada się że liczba równań strukturalnych jest równa liczbie zmiennych endogenicznych.

Rozwiązanie otrzymanego systemu racjonalnych oczekiwań polega na aproksymacji funkcji przejścia (reguły decyzyjnej), (ang. transition, policy function, decision rules):

$$y_t^{(+)} = g(y_{t-1}^{(-)}, \varepsilon_t; \theta),$$

opisującej kształtowanie się bieżących wartości zmiennych endogenicznych w zależności od wektora stanu, na który składają się opóźnione zmienne endogeniczne  $y_{t-1}^{(-)}$  i bieżące zmienne egzogeniczne, oraz zakłócenia losowe  $\varepsilon_t$ , rozpatrywanej warunkowo względem wektora parametrów  $\theta$ , co jest dalej pomijane w notacji. Funkcja decyzyjna  $g(\cdot)$  jest wyznaczana z wykorzystaniem aproksymacji szeregiem Taylora funkcji  $f(\cdot)$  wokół deterministycznego stanu stabilnego modelu, określonego przez wektor  $(\bar{y}^{(-)}, \bar{\varepsilon})$ , spełniający następujące warunki:  $f(\bar{y}^{(+)}, \bar{y}^{(-)}, \bar{\varepsilon}) = 0$ ,  $\bar{y}^{(+)} = g(\bar{y}^{(-)}, \bar{\varepsilon})$  i  $\bar{\varepsilon} = 0$ , który jest otrzymywany po rozwiązaniu nieliniowego, wielowymiarowego układu równań strukturalnych modelu. Oznacza on dynamiczną równowagę modelu, jest określony przez wartości zmiennych  $y_t^{(+)} = y_{t+1}^{(+)} = \bar{y}^{(+)}$ , oraz dla zakłóceń losowych, ustalonych na poziomie bezwarunkowej wartości oczekiwanej:  $\varepsilon_t = \varepsilon_{t+1} = 0$ . Uwzględnienie zależności  $y_{t+1}^{(+)} = g^{(+)}(y_t^{(-)}, \varepsilon_{t+1})$  i  $y_t^{(-)} = g^{(-)}(y_{t-1}^{(-)}, \varepsilon_t)$ , gdzie  $g^{(+)}(\cdot)$  i  $g^{(-)}(\cdot)$  oznaczają zależności ograniczone do zmiennych odpowiednio: występujących w formie oczekiwań wartości przyszłych i w postaci opóźnień zmiennych endogenicznych, umożliwia zapisanie modelu równowagi ogólnej w formie:

$$E_t[f(g^{(+)}(g^{(-)}(y_{t-1}^{(-)}, \varepsilon_t), \varepsilon_{t+1}), g(y_{t-1}^{(-)}, \varepsilon_t), y_{t-1}^{(-)}, \varepsilon_t)] = 0,$$

która nie posiada rozwiązania analitycznego, co powoduje konieczność stosowania metod numerycznych do przybliżenia  $g(y_{t-1}^{(-)}, \varepsilon_t)$ . Obecnie często stosowaną jest metoda perturbacji, polegająca na rozwinięciu  $f(\cdot)$  w szereg Taylora i aproksymacji pierwszego rzędu funkcji decyzyjnej przez:

$$\hat{g}(y_{t-1}^{(-)}, \varepsilon_t) = \bar{y} + g_y \hat{y}_{t-1}^{(-)} + g_\varepsilon \hat{\varepsilon}_t$$

gdzie  $\hat{y}_{t-1}^{(-)} = y_{t-1}^{(-)} - \bar{y}^{(-)}$ ,  $\hat{\varepsilon}_t = \varepsilon_t - \bar{\varepsilon}$ , nieznane macierze  $g_y$  i  $g_\varepsilon$  są obliczane na podstawie warunku zerowania się odpowiednich układów równań macierzowych i spełnienia warunków stabilności, w sensie Blancharda i Kahna, rozwiązania modelu racjonalnych oczekiwań: Blanchard i Kahn (1980). Szczegóły zawierają m.in. prace: Collard i Juillard (2001a, 2001b), Juillard (2002) i Villemot (2011).

Elementy macierzy  $g_y$  i  $g_\varepsilon$ , prowadzących do rozwiązania modelu równowagi ogólnej, będące nieliniowymi funkcjami  $\theta$ , są obliczane dla ustalonego wektora parametrów strukturalnych  $\theta$ . W procesie estymacji równań modelu, za pomocą metod symulacyjnych, rozwiązanie takie, spełniające warunki stabilności, jest obliczane dla każdej wylosowanej wartości  $\theta$ , co w praktyce oznacza nałożenie na przestrzeń parametrów strukturalnych szeregu restrykcji, których charakter jest trudny do określenia. Metody analizy wrażliwości pozwalają na uzyskanie pewnego wglądu w charakter zależności między  $\theta$  a macierzami równania przejścia  $g_y$  i  $g_\varepsilon$ .

Estymacja parametrów strukturalnych  $\theta$  modelu równowagi ogólnej wymaga połączenia danych, pochodzących z makroekonomicznych szeregów czasowych, ze zmiennymi endogenicznymi, zdefiniowanymi w konstrukcji teoretycznej modelu, nazywanymi zmiennymi konceptualnymi w pracy: Grabek, Kłos i Utzig-Lenarczyk (2007). Połączenie takie jest zdefiniowane przez równanie obserwacji (pomiaru), (ang. measurement equation), które łączy zmienne stanu z ich odpowiednikami w zmiennych obserwowalnych:

$$Y_t = h(y_{t-1}^{(-)}, v_t; \theta),$$

gdzie  $Y_t$  jest wektorem  $(n \times 1)$  obserwowanych zmiennych endogenicznych, zakłócenie losowe w równaniu obserwacji  $v_t$ , niezależne od zakłóceń losowych  $\varepsilon_t$  w postaci strukturalnej, może być interpretowane jako błąd pomiaru danych, bądź jako miara stopnia potencjalnie niepoprawnej specyfikacji modelu teoretycznego, Lubik i Schorfheide (2006). Oprócz opóźnionych zmiennych endogenicznych  $y_{t-1}^{(-)}$  i innowacji  $\varepsilon_t$ , równanie przejścia może obejmować kształtowanie się dodatkowych zmiennych z konstrukcji teoretycznej, dla których dostępne są dane empiryczne. Część zmiennych endogenicznych w modelu może nie mieć odpowiedników w zmiennych obserwowalnych, co powoduje że niektóre zależności mogą zostać pominięte w czasie konstrukcji równania obserwacji i, w konsekwencji, parametry strukturalne występujące jedynie w tych równaniach są kalibrowane. Liniowa postać funkcji  $g(\cdot)$  w równaniu przejścia i funkcji  $h(\cdot)$  w równaniu obserwacji powoduje, że otrzymany układ równań można traktować jako liniowy system przestrzeni stanów, bezpośrednio wykorzystywany do konstrukcji funkcji wiarygodności. Najczęściej w praktyce przyjmuje się liniową postać równania obserwacji i zakłada się rozkłady normalne dla zakłóceń losowych  $\varepsilon_t$  i  $v_t$ , co skutkuje obniżeniem stopnia numerycznego skomplikowania aplikacji. Metody rozwiązywania i estymacji modelu w przypadkach ogólnych opracowali Fernández-Villaverde i Rubio-Ramírez (2003, 2005), Arulampalam, Maskell, Gordon i Clapp (2002) oraz Amisano i Tristani (2007).

### 3. KONSTRUKCJA FUNKCJI WIARYGODNOŚCI

Zmienne obserwowalne są połączone ze zmiennymi zdefiniowanymi w konstrukcji teoretycznej modelu w sposób przybliżony, dopuszczający istnienie odchylenia  $v_t$ :

$$Y_t = Cy_t^{(\cdot)} + v_t$$

gdzie  $C$  pełni rolę macierzy selekcjonującej i odzwierciedla założenia dotyczące wyboru poszczególnych zmiennych stanu do konstrukcji równania obserwacji,

związane z dostępnością i definicją danych empirycznych. Wykorzystując zależność  $y_t^{(\cdot)} = \bar{y} + \hat{y}_t^{(\cdot)}$ , gdzie  $\hat{y}_t^{(\cdot)}$  jest odchyleniem zmiennych endogenicznych  $y_t^{(\cdot)}$  od ich wartości w stanie stabilnym  $\bar{y}$ , oraz zakładając liniową postać równania przejścia:

$$y_t^{(\cdot)} = \bar{y} + g_y \hat{y}_{t-1}^{(\cdot)} + g_\varepsilon \hat{\varepsilon}_t,$$

otrzymujemy następujący układ równań:

$$Y_t = C\bar{y} + C\hat{y}_t^{(\cdot)} + v_t$$

$$\hat{y}_t^{(\cdot)} = g_y \hat{y}_{t-1}^{(\cdot)} + g_\varepsilon \hat{\varepsilon}_t$$

w którym macierze  $g_y$  i  $g_\varepsilon$  zależą od wektora  $\theta$  oraz zakładamy  $E(v_t) = 0$  i  $E(v_t v_t') = \Sigma_v$ . Układ ten, liniowy względem zmiennych endogenicznych, tworzy reprezentację modelu równowagi ogólnej w przestrzeni stanów, na podstawie którego możliwe jest skonstruowanie funkcji wiarygodności, wykorzystując filtr Kalmana, ze względu na nieobserwowalny charakter niektórych zmiennych stanu. Dla wektora zakłóceń losowych w równaniu przejścia  $w_t = g_\varepsilon \hat{\varepsilon}_t$  i w równaniu obserwacji  $v_t$  zakłada się niezależne, identyczne rozkłady normalne, o wartościach oczekiwanych równych zero i macierzach kowariancji odpowiednio  $Q$  oraz  $V$ :  $w_t \sim iidN(0, Q)$  i  $v_t \sim iidN(0, V)$ .

Łączny rozkład obserwacji  $Y$ , pochodzącej z teoretycznej gospodarki pozostającej w równowadze dynamicznej, jest iloczynem warunkowych rozkładów wektorów  $Y_t$ , względem przeszłych wartości  $Y_{t-1}$ :  $p(Y_t | Y_{t-1}, \theta)$ , przy ustalonych parametrach  $\theta$  i rozkładzie stanu początkowego  $Y_0$ :

$$p(Y|\theta) = p(Y_T | Y_{T-1}, \theta) p(Y_{T-1} | Y_{T-2}, \theta) \dots p(Y_1 | Y_0, \theta) p(Y_0 | \theta).$$

gdzie  $Y$  jest macierzą  $(T \times n)$  obserwacji na zmiennych endogenicznych. Funkcja wiarygodności jest konstruowana rekurencyjnie; Hamilton (1994), Fernández-Villaverde i Rubio-Ramírez (2005, 2007):

$$\ell(\theta|Y) = \prod_{t=1}^T (2\pi)^{-n/2} \det(\Sigma_{t|t-1})^{-1/2} \exp[-0.5(Y_t - Y_{t|t-1})' \Sigma_{t|t-1}^{-1} (Y_t - Y_{t|t-1})],$$

gdzie  $\Sigma_{t|t-1}$ , o wymiarach  $(n \times n)$ , jest warunkową, względem zbioru informacji w momencie  $(t-1)$ , macierzą kowariancji wektora  $Y_t$ , zawierającego obserwacje do momentu  $t$ ,  $Y_{t|t-1}$  wartością oczekiwaną  $Y_t$ , warunkową względem zbioru informacji w momencie  $(t-1)$ :

$$Y_{t|t-1} = \bar{Y} + C\hat{y}_{t|t-1}^{(\cdot)},$$

$$\Sigma_{t|t-1} = C P_{t|t-1} C' + V,$$

natomiast predykcja wektora stanu  $\hat{y}_{t+1|t}^{(\cdot)}$  i jego macierzy kowariancji  $P_{t+1|t}$  zachodzi według następujących formuł:

$$\hat{y}_{t+1|t}^{(\cdot)} = g_y \hat{y}_{t|t-1}^{(\cdot)} + K_t v_t,$$

$$P_{t+1|t} = g_y (P_{t|t-1} + P_{t|t-1} C' \Sigma_{t|t-1}^{-1} C P_{t|t-1}) g_y' + Q$$

gdzie  $K_t = g_y P_{t|t-1} C' \Sigma_{t|t-1}^{-1}$  oznacza poprawkę Kalmana. Stan początkowy układu ustala się w praktyce na poziomie odpowiadającym deterministycznemu stanowi stabilnemu modelowi. Opisana procedura jest zaimplementowana w pakiecie Dynare, stanowiącym obecnie podstawowe narzędzie estymacji i symulacji estymowanych modeli równowagi ogólnej, dlatego została tutaj w skrócie przedstawiona, Adjemian, Bastani, Juillard, Mihoubi, Perendia, Ratto i Villemot (2011). Funkcja wiarygodności może bezpośrednio służyć do estymacji parametrów strukturalnych modelu, m.in. Lindé (2005). Najczęściej jednak wykorzystuje się metody wnioskowania bayesowskiego, pozwalające na uwzględnienie dodatkowej informacji spoza próby i uniknięcie znacznych trudności numerycznych, ze względu na zastosowanie metod Monte Carlo. Opracowane zostały również techniki konstrukcji funkcji wiarygodności i estymacji modeli, w których występują niestacjonarne zmienne losowe; Durbin i Koopman (2001), zob. implementacja: Adjemian, Bastani, Juillard, Mihoubi, Perendia, Ratto i Villemot (2011). Linearyzacja równań strukturalnych nie jest konieczna w przypadku zastosowania innych metod konstrukcji funkcji wiarygodności, wykorzystujących filtry Monte Carlo; Arulampalam, Maskell, Gordon i Clapp (2002), Fernández-Villaverde i Rubio-Ramírez (2003), An i Schorfheide (2007a), Amisano i Tristani (2007) oraz Fair i Taylor (1983).

#### 4. ESTYMACJA BAYESOWSKA

Analiza bayesowska dostarcza narzędzia wnioskowania o parametrach strukturalnych estymowanych modeli równowagi ogólnej, oceny niepewności związanej z ich estymacją i metody określania błędu popełnianego przy szacowaniu interesujących badacza charakterystyk teoretycznej gospodarki. Możliwość konstrukcji rozkładu prawdopodobieństwa wybranej funkcji parametrów fundamentalnych modelu, procesów stochastycznych i pozostałych, wielkości odzwierciedlających mechanizmy gospodarcze, ma kluczowe znaczenie w ocenie stopnia wiarygodności rezultatów badań. Bayesowskie podejście do estymacji wykorzystuje kompletny system warunków pierwszego rzędu, ograniczeń zasobowych i reguł



decyzyjnych, który jest następnie szacowany na podstawie danych pochodzących ze zagregowanych szeregów czasowych, pozwalając równocześnie na skonstruowanie jednej miary określającej stopień dopasowania modelu do danych empirycznych, w postaci brzegowej gęstości obserwacji. Jednoczesna estymacja kompletnego systemu dynamicznego pozwala na rozwiązanie problemów endogeniczności regresorów, występującego w regule decyzyjnej banku centralnego, który wymaga stosowania szeregu dodatkowych zmiennych instrumentalnych podczas estymacji pojedynczych równań uogólnioną metodą momentów, Lubik i Schorfheide (2006). Z innych prac poświęconych bayesowskiej estymacji modeli równowagi ogólnej można wymienić: Schorfheide (2011), Fernández-Villaverde (2010), Milani i Poirier (2007), Ruge-Murcia (2007), Rabanal i Rubio-Ramírez (2005a, 2005b), Fernández-Villaverde i Rubio-Ramírez (2004), DeJong, Ingram i Whiteman (2000), Otrok (2001) oraz Singleton (1988).

Analiza bayesowska pozwala na połączenie w procesie wnioskowania o wektorze parametrów strukturalnych danego modelu  $M_i$  subiektywnej wstępnej wiedzy badacza o możliwych wartościach parametrów, sformułowanej w rozkładzie *a priori*, z informacją zawartą w funkcji wiarygodności. Łączny rozkład wektora obserwacji  $Y=(Y_1', \dots, Y_T')'$  i wektora parametrów strukturalnych  $\theta_i$  danego modelu, określany przez iloczyn gęstości: próbkowej  $p(Y|\theta_i, M_i)$  i *a priori*  $p(\theta_i|M_i)$ , jest nazywany statystycznym modelem bayesowskim, z którego na podstawie wzoru Bayesa, otrzymujemy rozkład *a posteriori* wektora parametrów, warunkowy względem  $i$ -tej specyfikacji  $p(\theta_i|Y, M_i)$ :

$$p(\theta_i|Y, M_i) = \frac{p(Y|\theta_i, M_i)p(\theta_i|M_i)}{p(Y|M_i)}$$

gdzie  $p(Y|M_i)$  oznacza brzegową gęstość obserwacji w  $i$ -tym modelu, wyrażoną całką:  $p(Y|M_i) = \int p(Y|\theta_i, M_i)p(\theta_i|M_i)d\theta_i$ ; Zellner (1971), Osiewalski (1991, 2001) i O'Hagan (1994). Po zaobserwowaniu danych  $Y$ , gęstość wektora obserwacji  $p(Y|\theta_i, M_i)$  rozpatrujemy jako funkcję parametrów  $\theta_i$ , przy ustalonych obserwacjach, czyli rozważamy funkcję wiarygodności postaci:  $\ell(\theta_i|Y, M_i) = p(Y|\theta_i, M_i)$ . Gęstość rozkładu *a posteriori* jest proporcjonalna do iloczynu funkcji wiarygodności  $\ell(\theta_i|Y, M_i)$  i rozkładu *a priori*  $p(\theta_i|M_i)$ :

$$p(\theta_i|Y, M_i) \propto \ell(\theta_i|Y, M_i)p(\theta_i|M_i).$$

Łączny rozkład *a posteriori* parametrów i innych zmiennych w modelu zawiera wszystkie dostępne o nich informacje, pozwalając na wnioskowanie o ocenach punktowych i niepewności związanej z wybranymi funkcjami parametrów, poprzez odpowiednie rozkłady brzegowe. Estymacja bayesowska modeli równowagi ogólnej prowadzi do elastycznego uwzględnienia informacji o funkcyjono-



waniu gospodarki uzyskanej z badań mikroekonomicznych. Znajomość przeciętnego czasu trwania kontraktów płacowych, preferencji konsumentów w zakresie podaży pracy, czy też prawdopodobnego przedziału zmienności innych wielkości, pozwala na ich uwzględnienie poprzez rozkład *a priori*, którego rozproszenie można interpretować jako odzwierciedlenie stopnia wiarygodności wiedzy wstępnej. Subiektywne przekonania badacza dotyczące zachowań grup podmiotów gospodarczych w modelu, wyrażone w rozkładzie *a priori*, są zawsze modyfikowane przez funkcję wiarygodności, co pozwala interpretować różnice między wnioskowaniem *a priori* i *a posteriori* również w kategoriach rozbieżności między danymi mikroekonomicznymi i danymi z szeregów makroekonomicznych. Niska wstępna wiedza o kształtowaniu się parametrów strukturalnych modelu, bądź jej całkowity brak, oznacza w praktyce przyjęcie dla nich nieinformacyjnych rozkładów *a priori* powodujących, że wnioskowanie *a posteriori* opiera się głównie na informacjach zawartych w funkcji wiarygodności. Alternatywnie do podejścia bayesowskiego, w niewielkich modelach równowagi ogólnej, zarówno liniowych jak i nieliniowych, stosowano do estymacji metodę największej wiarygodności, której własności omawiają m.in. Fernández-Villaverde i Rubio-Ramírez (2005, 2007), Galí, Gertler i López-Salido (2005), Lindé (2005), Fernández-Villaverde, Rubio-Ramírez i Santos (2006) oraz Ruge-Murcia (2007).

Metody wnioskowania bayesowskiego dostarczają formalnego narzędzia służącego porównywaniu konkurencyjnych modeli, w tym modeli równowagi ogólnej i wektorowej autoregresji, poprzez ich prawdopodobieństwa *a posteriori*. W zbiorze alternatywnych statystycznych modeli bayesowskich,  $M = \{M_1, \dots, M_m\}$ , dla danych obserwacji  $Y$ , możemy określić prawdopodobieństwo *a posteriori*  $i$ -tego modelu, korzystając ze wzoru Bayesa:

$$P(M_i|Y) = \frac{p(Y|M_i)P(M_i)}{\sum_{j=1}^m p(Y|M_j)P(M_j)},$$

gdzie  $P(M_i)$  jest prawdopodobieństwem *a priori* danej specyfikacji, opisującym subiektywne przekonania badacza co do możliwości opisu obserwacji przez ten model. Jeśli rozkład *a priori* jest scentrowany w obszarach przestrzeni parametrów, dla których funkcja wiarygodności przyjmuje niskie wartości, to model taki będzie mniej prawdopodobny *a posteriori* niż ta sama specyfikacja z bardziej rozproszonym rozkładem *a priori*, przy założeniu jednakowych szans *a priori* każdego z nich. Zgodność informacji wstępnej z funkcją wiarygodności prowadzi do najwyższego prawdopodobieństwa *a posteriori*. Bayesowskie porównywanie modeli umożliwia również eliminację wpływu prawdopodobieństw  $P(M_i)$  poprzez rozważenie ilorazu szans *a posteriori* par modeli, zdefiniowanego przez iloczyn czynnika Bayesa i ilorazu szans *a priori*:

$$\frac{P(M_s | Y)}{P(M_q | Y)} = \frac{p(Y|M_s)}{p(Y|M_q)} \times \frac{P(M_s)}{P(M_q)},$$

gdzie czynnik Bayesa  $B_{sq}$ , określony przez iloraz brzegowych gęstości wektora obserwacji  $p(Y|M_s)/p(Y|M_q)$ , mierzy relatywną moc wyjaśniającą modeli  $M_s$  i  $M_q$  oraz ujmuje informacje, w jakim stopniu obserwacje potwierdzają model  $M_s$  w porównaniu z modelem  $M_q$ ;  $B_{sq} > 1$  oznacza wskazanie przez obserwacje, że model  $M_s$  jest bardziej adekwatny do ich opisu; Jeffreys (1961), Kass i Raftery (1995).

Metody wnioskowania bayesowskiego mogą również zostać zastosowane do bezpośredniego łączenia wiedzy z konkurencyjnych modeli o kształtowaniu się wybranej funkcji parametrów strukturalnych i procesów stochastycznych, opisujących interesującą badacza wielkość makroekonomiczną  $\Delta$ , np. wskaźnik inflacji w pracy: Jacobson i Karlsson (2004). Funkcja gęstości uśrednionego rozkładu *a posteriori*  $\Delta$  jest średnią ważoną gęstości *a posteriori*  $\Delta$  w każdym z modeli:

$$p(\Delta|Y) = \sum_{i=1}^m p(\Delta|Y, M_i) P(M_i|Y),$$

gdzie wagi  $P(M_i|Y)$  są prawdopodobieństwami *a posteriori* modeli.

Schemat estymacji bayesowskiej w praktyce można sprowadzić do czterech zasadniczych części:

1. Określenie rozkładu *a priori* dla parametrów estymowanych i kalibracja parametrów nie podlegających estymacji; umożliwia to uwzględnienie w modelu wiedzy wstępnej.
2. Wyznaczenie, poprzez numeryczną aproksymację modalnej rozkładu *a posteriori*, przybliżonych ocen parametrów strukturalnych i macierzy kowariancji, które są niezbędne do zapoczątkowania łańcucha Markowa.
3. Numeryczna realizacja estymacji bayesowskiej poprzez metody Monte Carlo oparte na łańcuchach Markowa (w szczególności za pomocą algorytmu Metropolis i Hastingsa) oraz empiryczna ocena ich zbieżności.
4. Aproksymacja brzegowych rozkładów *a posteriori* parametrów oraz innych charakterystyk modelu na podstawie uzyskanego łańcucha Markowa.

## 5. INNE ZAGADNIENIA METODOLOGICZNE

Ogół zagadnień metodologicznych związanych z estymowanymi modelami równowagi ogólnej jest niezwykle obszerny a ich dokładne omówienie wymagałoby szeregu opracowań; obszerny przegląd tematów można znaleźć m.in. w pracy: Wróbel-Rotter (2012f). Wybrane zagadnienia metodologiczne stanowiły cel analiz we wcześniejszych pracach autorki: wprowadzenie w tematykę: Wróbel-Rotter

(2007b, 2007c), szczegóły wyprowadzenia równań strukturalnych przykładowego modelu: Wróbel-Rotter (2011a, 2011c, 2012e), omówienie zagadnień estymacji i metod numerycznych: Wróbel-Rotter (2007a, 2008, 2012b), prezentacja technik oceny stabilności rozwiązania i zależności między parametrami postaci strukturalnej i zredukowanej: Wróbel-Rotter (2011b, 2012c) oraz metoda budowy i zastosowanie hybrydowego modelu wektorowej autoregresji: Wróbel-Rotter (2012a, 2012d). Oprócz poruszonych w artykule tematów, w literaturze obecnych jest wiele zagadnień dodatkowych, z których zasadniczy dotyczy prognozowania na podstawie estymowanych modeli równowagi ogólnej, analizy charakterystyk ekonomicznych gospodarki, w szczególności funkcji odpowiedzi impulsowych, i innych zagadnień dotyczących własności modeli, m.in. warunków identyfikowalności parametrów. Szeroko traktowane są również aspekty numeryczne estymacji bayesowskiej, pełniące kluczową rolę w procesie znajdowania oszacowań parametrów. Zagadnienia te w większości nie są szczegółowo omawiane w pracy, ze względu na ich obszerność; problemy specyfikacji i identyfikowalności zostały w skrócie przedstawione poniżej. Metody prognozowania na podstawie estymowanych modeli równowagi ogólnej można znaleźć m.in. w pracach: Del Negro i Schorfheide (2003), Smets i Wouters (2004), Adolfson, Lindé i Villani (2005), Rubaszek i Skrzypczyński (2008), Schorfheide, Sill i Krysko (2010), Edge, Kiley i Laforge (2009), Herbst i Schorfheide (2011) oraz Del Negro i Schorfheide (2012). Metody prognozowania bayesowskiego omawia m.in. Geweke i White-man (2006).

## 6. ANALIZA WRAŻLIWOŚCI

Analiza wrażliwości jest pojęciem ogólnym i może się odnosić do badania wpływu na interesującą charakterystykę modelu zmiany jego założeń, zastosowania innej metody estymacji, przyjęcia alternatywnych metod testowania hipotez, czy też sposobu predykcji zmiennych, Poirier (1995). W zależności od zakresu zmiany danych parametrów bądź ich funkcji wokół wielkości referencyjnych, można rozpatrywać analizę wrażliwości w sensie lokalnym, rozważając elastyczności czy też efekty krańcowe, bądź globalnym (ang. global sensitivity analysis, GSA), związanym ze znacznymi zakresami wartości zmiennych niezależnych w systemie dynamicznym, jakie pozwalają przeanalizować prezentowane metody. Na gruncie wnioskowania bayesowskiego analiza wrażliwości najczęściej dotyczy wpływu zmiany parametrów rozkładów *a priori* na ich oceny uzyskane *a posteriori*. W estymowanych modelach równowagi ogólnej często też sprawdza się uzyskane rezultaty estymacji w zależności od różnych ustawień parametrów metod numerycznych i przyjętych kryteriów oceny ich zbieżności. Oddzielnym zagadnieniem jest zastosowanie metod analizy wrażliwości w ocenie zależności występujących w konstrukcji teoretycznej modelu równowagi ogólnej.

Sposób rozwiązywania i liniowej aproksymacji modeli równowagi ogólnej nie umożliwia określenia bezpośredniego powiązania parametrów postaci zredukowanej z parametrami strukturalnymi. Powoduje to, że charakterystyka takiego związku wymaga zastosowania dodatkowych metod, w szczególności technik stosowanych w analizie wrażliwości, które pozwalają na określenie wybranych cech modelu dynamicznego i kluczowych czynników determinujących jego własności. Analiza wrażliwości określa w jakim stopniu niepewność związana z wnioskowaniem o danej charakterystyce teoretycznej gospodarki, uzyskanej z postaci zredukowanej modelu, jest przypisywana do źródeł niepewności związanych z poszczególnymi parametrami strukturalnymi. Pojęciem zbliżonym do analizy wrażliwości jest analiza niepewności, która ogranicza się do czynników wyjściowych w modelu; Saltelli, Ratto, Andres, Campolongo, Cariboni, Gatelli, Saisana i Tarantola (2008). Parametry występujące w postaci strukturalnej modelu są traktowane jako wielkości wpływające na kształtowanie się najważniejszych jego własności, dotyczących m.in. warunków stabilności, współczynników postaci zredukowanej i charakterystyk ekonomicznych gospodarki. Kluczowe procesy w systemie ekonomicznym, oznaczającym w tym przypadku estymowany model równowagi ogólnej, są utożsamiane z zależnościami między parametrami strukturalnymi a parametrami postaci zredukowanej, określonymi przez nieliniowe funkcje parametrów strukturalnych w reprezentacji modelu w przestrzeni stanów. Własności tych zależności są identyfikowane przez analizę wrażliwości odpowiednich parametrów strukturalnych w modelu.

Estymowane modele równowagi ogólnej wymagają spełnienia przez parametry strukturalne szeregu warunków zapewniających stabilność ich rozwiązania. Analityczne wyznaczenie pełnego obszaru stabilności parametrów strukturalnych jest najczęściej niemożliwe i, w praktyce, zagadnienie to jest pomijane lub ograniczane do sprawdzenia warunków stabilności dla wartości oczekiwanych rozkładów *a priori*, natomiast warunki zapewniające jego spełnienie są nakładane dopiero na etapie estymacji bądź kalibracji parametrów strukturalnych. Metody analizy globalnej wrażliwości umożliwiają ocenę, które obszary przestrzeni parametrów w rozkładzie *a priori* nie spełniają warunków stabilności rozwiązania modelu i mogą być pomocne w określeniu wartości początkowych w procedurach numerycznych; zob. Ratto (2008), Berliant i Dakhlija (1997) oraz Saltelli (2002). Pozwalają one również na wykrycie potencjalnych konfliktów między wartościami poszczególnych parametrów mających kluczowe znaczenie w dopasowaniu modelu do wybranych szeregów makroekonomicznych. Analiza wrażliwości może być również zastosowana do badania obszarów stabilności rozwiązania, oceny dopasowania do danych oraz techniki przybliżania związku między parametrami postaci zredukowanej i strukturalnej modelu z zastosowaniem filtrowania Monte Carlo i dekompozycji funkcji; zob. Saltelli, Ratto, Andres, Campolongo, Cariboni, Gatelli, Saisana i Tarantola (2008), Saltelli, Tarantola, Campolongo i Ratto (2004), Ratto (2008), Berliant i Dakhlija (1997) oraz Saltelli (2002).

Pełną analizę wrażliwości dla estymowanego modelu równowagi ogólnej przedstawili m.in. Ratto, Röger, in't Veld i Girardi (2005).

## 7. SPECYFIKACJA I IDENTYFIKACJA MODELI

Estymowany model równowagi ogólnej jest konstrukcją teoretyczną łączącą w jednym systemie teorię makroekonomii i mikroekonomii, co powoduje że wszelkie wielkości opisujące gospodarkę i prognozy są wynikiem założonej w modelu teorii oraz struktury procesów stochastycznych kształtującej jej dynamikę. Ogólny charakter wskazuje na kilka potencjalnych źródeł jego nieodpowiedniej konstrukcji, mogących mieć swoje przyczyny w niepoprawnym określeniu relacji strukturalnych gospodarki, preferencji konsumentów i technologii, pominięciu zależności nieliniowych, nieprawidłowej specyfikacji procesów stochastycznych oraz symetrycznym traktowaniu podmiotów w modelach dla gospodarek otwartych; Lubik i Schorfheide (2006). Poprawna specyfikacja modelu jest tutaj rozumiana jako uznanie danego modelu za właściwy proces generujący obserwacje. Zmniejszenie stopnia niepoprawnej specyfikacji estymowanych modeli równowagi ogólnej jest możliwe poprzez zwiększenie liczby zmiennych losowych modelujących zakłócenia strukturalne w modelu zapisanym w postaci systemu racjonalnych oczekiwań, m.in. Smets i Wouters (2003) oraz Lubik i Schorfheide (2006). Alternatywnie, możliwe jest wprowadzenie stochastycznych zakłóceń do równania obserwacji, bez nadawania im interpretacji ekonomicznej; Sargent (1989). Ocena poprawności modeli strukturalnych jest najczęściej dokonywana po ich zapisaniu w formie wektorowej regresji, z odpowiednimi parametrycznymi restrykcjami i analizie ich zgodności z danymi empirycznymi i modelem referencyjnym; Schorfheide (2000), An i Schorfheide (2007b). Omówienie zagadnień polityki pieniężnej w przypadku modeli z pewnym stopniem nieodpowiedniej specyfikacji można znaleźć m.in. w pracy: Del Negro i Schorfheide (2005, 2009).

Oprócz zagadnienia poprawności specyfikacji estymowanych modeli równowagi ogólnej, często pojawiającym się w czasie ich konstrukcji, problemem jest identyfikacja parametrów strukturalnych. Model ekonometryczny nie jest identyfikowalny, jeśli konkurencyjne jego parametryzacje, mające różną interpretację ekonomiczną, prowadzą do tego samego rozkładu prawdopodobieństwa obserwacji, tzn. są obserwacyjnie równoważne; Lubik i Schorfheide (2006). Określenie warunków identyfikowalności modeli równowagi ogólnej jest trudniejsze niż w przypadku wektorowej autoregresji, czy też liniowych modeli o równaniach współzależnych, ze względu na nieliniowość związku między parametrami strukturalnymi a reprezentacją modelu w przestrzeni stanów, która określa łączny rozkład prawdopodobieństwa obserwacji. Modele te są identyfikowalne przy założeniu odpowiednich rozkładów *a priori* i struktury procesów egzoge-



nicznych; Lubik i Schorfheide (2004) oraz Beyer i Farmer (2004). Metody estymacji wykorzystujące podejścia z niepełną informacją, takie jak uogólniona metoda momentów czy też metoda znajdowania ocen parametrów poprzez porównywanie funkcji odpowiedzi impulsowych, mogą powodować występowanie ukrytych problemów identyfikacyjnych, ze względu na pominięcie podczas estymacji części założeń dotyczących pozostałych równań i procesów stochastycznych modelu. Specyfikacja pełnego układu założeń, konstrukcja funkcji wiarygodności, uwzględnienie dodatkowej informacji poprzez rozkład *a priori* i jednoczesna estymacja systemu równań pozwalają na zapewnienie identyfikowalności modelu i zapewniają istnienie rozkładu *a posteriori*. Zagadnienia identyfikacji modelu i jego parametrów strukturalnych nie będą szerzej omawiane w pracy, a jedynie zasygnalizowane dla zapewnienia kompleksowego podejścia do tematyki estymowanych modeli równowagi ogólnej.

## 8. MODELE HYBRYDOWE I POPRAWNOŚĆ SPECYFIKACJI

Stopień niezgodności restrykcyj, wynikających z mikroekonomicznych zagadnień optymalizacyjnych i reguł decyzyjnych, z danymi makroekonomicznymi może być analizowany w kontekście rozkładu *a priori* i *a posteriori* na gruncie wnioskowania bayesowskiego. Rozkład *a priori*, generowany z modelu równowagi ogólnej, może być przyjmowany dla wektorowej autoregresji, umożliwiając w ten sposób sprawdzenie zgodności teorii ekonomicznej z danymi empirycznymi; Del Negro i Schorfheide (2004). Metodologia pozwalająca na połączenie wnioskowania na podstawie estymowanych modeli równowagi ogólnej z modelami wektorowej autoregresji została zaproponowana w pracy Del Negro i Schorfheide (2004) i następnie rozwinięta przez Del Negro, Schorfheide, Smets i Wouters (2007). Określa ona klasę modeli hybrydowych, znanych w literaturze pod pojęciem DSGE-VAR (ang. Dynamic Stochastic General Equilibrium Vector AutoRegression), które powstały w wyniku poszukiwania metod uwzględniania w modelach wektorowej autoregresji informacji wstępnych, mających za zadanie ich powiązanie z teorią ekonomii i poprawienie ich własności. Pierwotnie prace te koncentrowały się na zastosowaniu modeli strukturalnych, podbudowanych teorią ekonomii, do konstrukcji rozkładów *a priori* dla wektorowej autoregresji; Ingram i Whiteman (1994), bądź do porównań własności statystycznych makroekonomicznych szeregów czasowych; DeJong, Ingram i Whiteman (1996). Modele teoretyczne dostarczały porównywalnego rozkładu *a priori*, ocenianego w kategoriach zdolności prognostycznej uzyskanej postaci hybrydowej, jak metodologia, w której zmienne wektorowej autoregresji są traktowane *a priori* jako grupa niezależnych procesów błędzenia losowego, zaproponowana w pracy Doan, Litterman i Sims (1984) oraz Litterman (1986). Pierwszy model hybrydowy, estymowany metodą największej wiarygodności, powstał po zdefiniowa-

niu procesu autoregresyjnego dla wektora zakłóceń losowych w równaniu obserwacji reprezentacji modelu równowagi ogólnej w przestrzeni stanów i został zaproponowany w pracy Ireland (2004). Dalszy rozwój metodologii polegał na konstrukcji rozkładów prawdopodobieństwa, które w sposób formalny łączyły wnioskowanie na podstawie wektorowej autoregresji z modelami posiadającymi uzasadnienie w teorii ekonomii. Techniki te pozwoliły na opracowanie metod formalnego wnioskowania o parametrach modelu równowagi ogólnej na podstawie wektorowej autoregresji w modelach hybrydowych; Del Negro i Schorfheide (2004) oraz Del Negro, Schorfheide, Smets i Wouters (2007) i dyskusję ich własności; Christiano (2007). Z obecnie opracowanych zastosowań modeli hybrydowych można wymienić prace m.in. Lee, Matheson i Smith (2007), Liu i Gupta (2008), Watanabe (2007), Chow i McNelis (2010), Adolfson, Laseén, Lindé i Villani (2008), Kolasa, Rubaszek i Skrzypczyński (2012) oraz Brzoza-Brzezina i Kolasa (2012).

Łączne wnioskowanie na podstawie obydwu podejść jest możliwe poprzez budowę modelu hybrydowego, czyli hybrydowego modelu wektorowej autoregresji. Składa się on z pomocniczego modelu wektorowej autoregresji, służącego aproksymacji rozwiązania zlinearyzowanego modelu równowagi ogólnej i konstrukcji rozkładu *a priori*, oraz zasadniczego modelu wektorowej autoregresji, szacowanego na danych rzeczywistych. Model hybrydowy można interpretować jako identyfikowalny model wektorowej autoregresji (ang. identified VAR), nie zaś jako formę zredukowaną modelu strukturalnego, An i Schorfheide (2007b). Waga  $\lambda$  modelu równowagi ogólnej w modelu hybrydowym może zostać ustalona arbitralnie, bądź na podstawie formalnego kryterium, opartego na brzegowej gęstości obserwacji. Model hybrydowy dostarcza narzędzia służącego odpowiedzi na pytanie, w jakim stopniu dane empiryczne potwierdzają hipotezy wnoszone przez model równowagi ogólnej, a w jakim są te hipotezy lepiej potwierdzane przez model wektorowej autoregresji bez ograniczeń. Stosowanie modelu strukturalnego jako punktu odniesienia dla procesów wektorowej autoregresji zakłada, że teoria ekonomiczna, ujęta poprzez stylizowane zależności zdefiniowane w modelowej gospodarce, nadaje się do jej uwzględnienia w modelu połączonym. Model hybrydowy można postrzegać jako sposób na poprawienie własności wektorowej autoregresji, poprzez uwzględnienie informacji wstępnej, wynikającej z teorii ekonomii, bądź też jako technikę umożliwiającą złagodzenie restrykcji obecnych w modelu równowagi ogólnej i ocenę poprawności jego specyfikacji.

Budowa modelu hybrydowego jest procesem hierarchicznym, zaczynającym się od specyfikacji rozkładu *a priori* dla wektora parametrów modelu równowagi ogólnej, warunkowo względem którego definiuje się rozkład *a priori* dla współczynników wektorowej autoregresji. Umożliwia to, po uwzględnieniu funkcji wiarygodności, wnioskowanie *a posteriori* zarówno o parametrach modelu strukturalnego jak i współczynnikach wektorowej autoregresji. Rozkład *a priori* jest konstruowany w oparciu o próbkę danych symulacyjnych z modelu struktural-



nego, które następnie służą estymacji modelu pomocniczego pozwalającego na przekazanie informacji wstępnej do modelu hybrydowego; podejście takie stosowali m.in. Sims i Zha (1998). Ma ono również swoje uzasadnienie w pionierskich pracach z zakresu łączenia w modelu statystycznym wiedzy spoza próby i informacji niesionej przez obserwacje oraz metodach ich estymacji; Theil i Goldberger (1961). Koncepcja modeli pomocniczych jest związana również z bayesowskimi metodami wnioskowania nie wprost (ang. indirect inference); Gallant i McCulloch (2009). Możliwe jest również rozpatrywanie modelu hybrydowego w kontekście badań poświęconych wykorzystywaniu wektorowej autoregresji jako punktu odniesienia do empirycznych porównań z modelami wywodzącymi się z teorii ekonomii.

Wnioskowanie w modelu hybrydowym o współczynnikach i macierzy kowariancji wektorowej autoregresji: i  $u$ , parametrach  $\theta$  modelu równowagi ogólnej i parametrze wagowym  $\lambda$  jest możliwe po zdefiniowaniu modelu połączonego, który jest określony przez wektorową autoregresję aproksymującą rozwiązanie zlinearyzowanej postaci modelu strukturalnego oraz wektorową autoregresję bez restrykcji dla danych obserwowalnych. Łączny rozkład *a priori* dla  $\Phi$ ,  $u$ ,  $\theta$  i  $\lambda$  jest budowany w sposób hierarchiczny:

$$p(\Phi, \Sigma_u, \theta, \lambda) = p(\Phi, \Sigma_u | \theta, \lambda) p(\theta) p(\lambda),$$

gdzie  $p(\Phi, \Sigma_u | \theta, \lambda)$  to rozkład *a priori* współczynników i macierzy kowariancji wektorowej autoregresji bez restrykcji, warunkowy względem  $\theta$ ,  $p(\theta)$  jest brzegowym rozkładem *a priori* dla parametrów modelu równowagi ogólnej, zaś  $p(\lambda)$  jest rozkładem *a priori* dla parametru wagowego. Statystyczny model bayesowski jest wtedy określony przez:

$$p(Y, \Phi, \Sigma_u, \theta, \lambda) = p(Y | \Phi, \Sigma_u) p(\Phi, \Sigma_u | \theta, \lambda) p(\theta) p(\lambda),$$

z którego uzyskujemy łączny rozkład *a posteriori*:

$$p(\Phi, \Sigma_u, \theta, \lambda | Y) = \frac{p(Y | \Phi, \Sigma_u) p(\Phi, \Sigma_u | \theta, \lambda) p(\theta) p(\lambda)}{p(Y)},$$

gdzie  $p(Y)$  jest brzegową gęstością obserwacji. Łączny rozkład *a posteriori* można poddać dekompozycji:

$$p(\Phi, \Sigma_u, \theta, \lambda | Y) = p(\Phi, \Sigma_u | Y, \theta, \lambda) p(\theta, \lambda | Y),$$

gdzie warunkowy rozkład *a posteriori* parametrów autoregresji  $p(\Phi, \Sigma_u | Y, \theta, \lambda)$  wyraża się standardową gęstością prawdopodobieństwa, natomiast brzegowy

rozkład parametrów modelu strukturalnego i parametru wagowego  $p(\theta, \lambda|Y)$ , jest przybliżany numerycznie, z zastosowaniem algorytmu Metropolis i Hastingsa; Adjemian, DarracqPariès i Moyen (2008). Hybrydowy model wektorowej autoregresji proponuje również metodę identyfikacji zakłóceń strukturalnych na podstawie innowacji występujących w postaci zredukowanej; Del Negro i Schorfheide (2004, 2006, 2008), Del Negro, Schorfheide, Smets i Wouters (2007).

## 9. UWAGI KOŃCOWE

Estymowany model równowagi ogólnej jest konstrukcją, która jest silnie zakorzeniona w teorii ekonomii. Otrzymane w wyniku rozwiązania mikroekonomicznych zagadnień optymalizacyjnych podmiotów równania strukturalne, mające formę nieliniowego systemu racjonalnych oczekiwań, należy sprowadzić do takiej postaci, aby ich parametry mogły zostać oszacowane na podstawie danych empirycznych, w szczególności aby można było zapisać funkcję wiarygodności. Oznacza to, że model poddaje się szeregowi przekształceń i aproksymacji, które prowadzą do jego operacjonalizacji. Główne obszary na które należy zwrócić uwagę to:

1. Układ założeń teoretycznych: postać funkcji chwilowej użyteczności i jej argumenty, struktura sektora produkcyjnego, która ma ścisły związek z mechanizmami agregującymi, w szczególności sposób indeksowania cen wpływający na postać krzywej Phillipsa.
2. Struktura procesów losowych w postaci strukturalnej, które determinują dynamikę zmiennych stanu w modelu.
3. Linearyzacja równań strukturalnych, najczęściej stosowana w praktyce w celu uproszczenia modelu. Modele w postaci nieliniowej są bardziej skomplikowane do opracowania od strony numerycznej.
4. Rozwiązanie zlinearyzowanego modelu równowagi ogólnej, powodujące nałożenie na przestrzeń parametrów skomplikowanych restrykcji, wynikających z konieczności zapewnienia jego stabilności.
5. Sposób połączenia zmiennych endogenicznych, występujących w rozwiązaniu zlinearyzowanego modelu, ze zmiennymi obserwowanymi, które należy oczyścić z trendu i sezonowości oraz sprowadzić do stacjonarności.
6. Przyjętą metodę estymacji, w szczególności czy jest to metoda z pełną informacją, jak podejście bayesowskie, czy też taka, w której równania szacuje się oddzielnie, jak np. uogólniona metoda momentów.
7. Stronę numeryczną, w której potencjalne problemy mogą wynikać z postaci funkcji wiarygodności, w konsekwencji nałożenia na przestrzeń parametrów licznych, skomplikowanych restrykcji, wynikających z konieczności zapewnienia stabilności rozwiązania modelu.

8. Funkcjonowanie algorytmu Metropolisa i Hastingsa, w szczególności dobór punktów startowych za pomocą przybliżonych metod numerycznych, monitorowanie jego zbieżności i analiza wrażliwości na zmianę wartości początkowych. Stabilność średnich ergodycznych.
9. Analizę obszarów wartości parametrów strukturalnych prowadzących do stabilności rozwiązania, wpływu w praktyce ich niewielkiej liczby na współczynniki postaci zredukowanej odpowiedzialne za charakterystyki ekonomiczne modelu.
10. W modelach hybrydowych: jakość aproksymacji zlinearyzowanego modelu równowagi ogólnej przez wektorową autoregresję, zazwyczaj niskiego rzędu. Wrażliwość ocen brzegowej gęstości obserwacji na zmianę wartości parametru wagowego.

Wymienione aspekty modelowania za pomocą estymowanych modeli równowagi ogólnej nie wyczerpują wszystkich obszarów, na które należy zwrócić szczególną uwagę w badaniach empirycznych. Mają one jedynie zasygnalizować możliwość wystąpienia problemów przy stosowaniu modeli w praktyce.

## BIBLIOGRAFIA

- Adjemian A., DarracqPariès M., Moyen S. (2008), *Towards a monetary policy evaluation framework*, European Central Bank Working Paper 942.
- Adjemian S., Bastani H., Juillard M., Mihoubi F., Perendia G., Ratto M., Villemot S. (2011), *Dynare: Reference manual, version 4*, Dynare Working Papers 1.
- Adolfson M., Laseén S., Lindé J., Villani M. (2008), *Evaluating an estimated New Keynesian small open economy model*, Journal of Economic Dynamics and Control 32.
- Adolfson M., Lindé J., Villani M. (2005), *Forecasting performance of an open economy Dynamic Stochastic General Equilibrium model*, Money Macro and Finance (MMF) Research Group Conference 2005 32.
- Amisano G., Tristani O. (2007), *Euro area inflation persistence in an estimated nonlinear DSGE model*, Journal of Economic Dynamics and Control 34.
- An S., Schorfheide F. (2007a), *Bayesian analysis of DSGE models*, Econometric Review 26.
- An S., Schorfheide F. (2007b), *Bayesian analysis of DSGE models — rejoinder*, Econometric Reviews, 26.
- Arulampalam M. S., Maskell S., Gordon N., Clapp T (2002), *A tutorial on particle filters for online non-linear/non-Gaussian Bayesian tracking*, IEEE Transactions on Signal Processing 50.
- Berliant M., Dakhliya S. (1997), *Sensitivity Analysis for Applied General Equilibrium Models in the Presence of Multiple Equilibria*, GE, Growth, Math Methods 9709003, EconWPA.
- Beyer A., Farmer R. E. A. (2004), *On the indeterminacy of New-Keynesian economics*, Computing in Economics and Finance, 152.
- Blanchard O. J., Kahn C. M. (1980), *The solution of linear difference models under linear expectations*, Econometrica, 48.
- Brzoza-Brzezina M., Kolasa M. (2012), *Bayesian evaluation of DSGE models with financial frictions*, National Bank of Poland Working Paper 109.
- Chow H. K., McNelis P. D. (2010), *Need Singapore fear floating? A DSGE-VAR approach*, Research Collection School of Economics, Paper 1250.

- Christiano L. (2007), *Comment on Marco Del Negro, Frank Schorfheide, Frank Smets, and Raf Wouters, 'On the Fit of New-Keynesian Models'*, *Journal of Business & Economic Statistics*, 25.
- Collard F., Juillard M. (2001a), *Accuracy of stochastic perturbation methods: The case of Asset Pricing Models*, *Journal of Economic Dynamics and Control* 25.
- Collard F., Juillard M. (2001b), *A higher-order Taylor expansion approach to simulation of stochastic forward-looking models with an application to a non-linear Phillips curve*, *Computational Economics* 17.
- DeJong D. N., Ingram B. F., Whiteman C. H. (1996), *A Bayesian approach to calibration*, *Journal of Business Economics and Statistics* 14.
- DeJong D. N., Ingram B. F., Whiteman C. H. (2000), *A Bayesian approach to dynamic macroeconomic*, *Journal of Econometrics* 98.
- Del Negro M., Schorfheide F. (2003), *Take your model bowling: Forecasting with the general equilibrium models*, *Economic Review — Federal Reserve Bank of Atlanta, Fourth Quarter 2003*, 88,4.
- Del Negro M., Schorfheide F. (2004), *Priors from General Equilibrium models for VARs*, *International Economic Review* 45.
- Del Negro M., Schorfheide F. (2005), *Policy predictions if the model doesn't fit*, *Journal of the European Economic Association* 3.
- Del Negro M., Schorfheide F. (2006), *How good is what you've got? DSGE-VAR as a toolkit for evaluating the DSGE models*, *Economic Review* Q2.
- Del Negro M., Schorfheide F. (2008), *Forming priors for DSGE models (and how it affects the assessment of nominal rigidities)*, *Journal of Monetary Economics* 55.
- Del Negro M., Schorfheide F. (2009), *Monetary policy analysis with potentially misspecified models*, *American Economic Review* 99.
- Del Negro M., Schorfheide F. (2012), *DSGE model-based forecasting*, *Handbook of Economic Forecasting* 2.
- Del Negro M., Schorfheide F., Smets F., Wouters R. (2007), *On the fit of New-Keynesian models*, *Journal of Business & Economic Statistics*, 25.
- Doan T., Litterman R., Sims C. (1984), *Forecasting and conditional projections using realistic prior distributions*, *Econometric Reviews* 3.
- Durbin J., Koopman S. J. (2001), *Time series analysis by state space methods*, Oxford University Press, Oxford.
- Edge R. M., Kiley M. T., Laforte J. P. (2009), *A comparison of forecast performance between Federal Reserve staff forecasts, simple reduced-form models, and a DSGE Model*, Finance and Economics Discussion Series, Federal Reserve Board, Washington, D.C., 2009-10.
- Fair R. C., Taylor J. B. (1983), *Solution and maximum likelihood estimation of dynamic nonlinear rational expectation models*, *Econometrica* 51.
- Fernández-Villaverde J. (2010), *The Econometrics of DSGE Models*, *SERIEs Journal of the Spanish Economic Association* 1.
- Fernández-Villaverde J., Rubio-Ramírez J. F. (2003), *Estimating nonlinear dynamic equilibrium economies: A likelihood approach*, *Computing in Economics and Finance* 91.
- Fernández-Villaverde J., Rubio-Ramírez J. F. (2004), *Comparing dynamic equilibrium models to data: A Bayesian approach*, *Journal of Econometrics* 123.
- Fernández-Villaverde J., Rubio-Ramírez J. F. (2005), *Estimating dynamic equilibrium economies: Linear versus nonlinear likelihood*, *Journal of Applied Econometrics* 20.
- Fernández-Villaverde J., Rubio-Ramírez J. F. (2007), *Estimating macroeconomic models: A likelihood approach*, *Review of Economic Studies* 74.
- Fernández-Villaverde J., Rubio-Ramírez J. F., Santos M. (2006), *Convergence properties of the likelihood of computed dynamic models*, *Econometrica* 74.
- Galí J., Gertler M., López-Salido J. D. (2005), *Robustness of the estimates of the hybrid new Keynesian Phillips curve*, *Journal of Monetary Economics* 52.

- Gallant R. A., McCulloch R. E. (2009), *On the determination of general scientific models with application to asset pricing*, Journal of the American Statistical Association, 94.
- Geweke J., Whiteman C. (2006), *Bayesian forecasting*, w: The Handbook of Economic Forecasting, (red.: G. Elliott, C.W.J. Granger i A. Timmerman), Amsterdam: North-Holland.
- Grabek G., Kłos B., Utzig-Lenarczyk G. (2007), *SOE-PL — model DSGE małej otwartej gospodarki estymowany na danych polskich*, Materiały i Studia NBP 217.
- Hamilton J. D. (1994), *Time series analysis*, Princeton University Press, Princeton.
- Herbst E., Schorfheide F. (2011), *Evaluating DSGE Model Forecasts of Comovements*, Federal Reserve Bank of Philadelphia Working Paper 11-5.
- Ingram B. F., Whiteman C. H. (1994), *Supplanting Minnesota prior. Forecasting macroeconomic time series using real business cycle model priors*, Journal of Monetary Economics, 34.
- Ireland P. N. (2004), *A method for taking models to the data*, Journal of Economics Dynamic & Control, 28.
- Jacobson T., Karlsson S. (2004), *Finding good predictors for inflation: A Bayesian model averaging approach*, Journal of Forecasting 23.
- Jeffreys H. (1961), *Theory of probability*, Oxford University Press, London.
- Jaillard M. (2002), *Perturbation method at order k: A recursive algorithm*, Computing in Economics and Finance 257.
- Kass R. E., Raftery A. E. (1995), *Bayes factors*, Journal of the American Statistical Association 90.
- Kolasa M., Rubaszek M., Skrzypczyński P. (2012), *Putting the New Keynesian DSGE model to the real-time forecasting test*, Journal of Money, Credit and Banking, (w druku).
- Lee K., Matheson T., Smith C. (2007), *Open economy DSGE-VAR forecasting and policy analysis: Head to head with the RBNZ published forecasts*, Reserved Bank of New Zealand Discussion Paper Series, DP2007/01.
- Lindé J. (2005), *Estimating New-Keynesian Phillips curves: A full information Maximum Likelihood approach*, Journal of Monetary Economics 52.
- Litterman R. (1986), *Forecasting with Bayesian vector autoregression: five years of experience*, Journal of Business & Economic Statistics, 4.
- Liu G., Gupta R. (2008), *Forecasting the South African Economy: A DSGE-VAR Approach*, Working Paper 2008-32, Tilburg University, Center for Economin Research.
- Lubik T., Schorfheide F. (2004), *Testing for indeterminacy: An application to US monetary policy*, American Economic Review 94.
- Lubik T., Schorfheide F. (2006), *A Bayesian look at New Open Economy Macroeconomics*, NBER Macroeconomic Annual 20.
- Milani F., Poirier D. J. (2007), *Econometric issues in DSGE models*, Econometric Reviews, 26.
- O'Hagan A. (1994), *Bayesian inference*, Edward Arnold, London.
- Osiewalski J. (1991), *Bayesowska estymacja i predykcja dla jednorównaniowych modeli ekonometrycznych*, Akademia Ekonomiczna w Krakowie (Monografie, nr 1000), Kraków.
- Osiewalski J. (2001), *Ekonometria bayesowska w zastosowaniach*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków.
- Otrok C. (2001), *On measuring the welfare cost of business cycles*, Journal of Monetary Economics 47.
- Poirier D. J. (1995), *Intermediate Statistics and Econometrics: A Comparative Approach*, MIT Press.
- Rabanal P., Rubio-Ramírez J. F. (2005a), *Comparing New Keynesian models in the Euro Area: A Bayesian approach*, Journal of Monetary Economics 52.
- Rabanal P., Rubio-Ramírez J. F. (2005b), *Comparing New Keynesian models of the Business cycle: A Bayesian approach*, Journal of Monetary Economics, 52.
- Ratto M. (2008), *Analysing DSGE models with global sensitivity analysis*, Computational Economics, 31.
- Ratto M., Røger W., in't Veld J., Girardi R. (2005), *An estimated New-Keynesian dynamic stochastic general equilibrium model of the Euro area*, European Economy — Economic Paper 220.



- Rubaszek M., Skrzypczyński P. (2008), *On the forecasting performance of a small-scale DSGE model*, International Journal of Forecasting 24.
- Ruge-Murcia F. J. (2007), *Methods to estimate dynamic stochastic general equilibrium models*, Journal of Economic Dynamics and Control 31.
- Saltelli A. (2002), *Sensitivity analysis for importance assessment*, Risk Analysis, 22.
- Saltelli A., Ratto M., Andres T., Campolongo F., Cariboni J., Gatelli D., Saisana M., Tarantola S. (2008), *Global sensitivity analysis, The Primer*, Wiley.
- Saltelli A., Tarantola S., Campolongo F., Ratto M. (2004), *Sensitivity Analysis in Practice: A Guide to Assessing Scientific Models*, Wiley.
- Sargent T. J. (1989), *Two models of measurements and the investment accelerator*, Journal of Political Economy 97.
- Schorfheide F. (2000), *Loss function based evaluation of DSGE models*, Journal of Applied Econometrics 15.
- Schorfheide F. (2011), *Estimation and evaluation of DSGE Models: Progress and challenges*, Federal Reserve Bank of Philadelphia Working Paper 11-7.
- Schorfheide F., Sill K., Krysko M. (2010), *DSGE model-based forecasting of non-modelled variables*, International Journal of Forecasting 26.
- Sims C. A., Zha T. (1998), *Bayesian methods for dynamic multivariate models*, International Economic Review 39.
- Singleton K. J. (1988), *Econometric issues in the analysis of equilibrium business cycle models*, Journal of Monetary Economics, 21.
- Smets F., Wouters R. (2003), *An estimated Dynamic Stochastic General Equilibrium model of the Euro Area*, Journal of the European Economic Association 1.
- Smets F., Wouters R. (2004), *Forecasting with a Bayesian DSGE model an application to the Euro Area*, Journal of Common Market Studies 42.
- Theil H., Goldberger A. S. (1961), *On pure and mixed estimation in economics*, International Economic Review 2.
- Villemot S. (2011), *Solving rational expectations models at first order: what Dynare does*, Dynare Working Papers 2.
- Watanabe T. (2007), *The application of DSGE-VAR model to macroeconomic data in Japan*, ESRI Discussion Paper Series 225-E.
- Wróbel-Rotter R. (2007a), *Dynamic Stochastic General Equilibrium Models: Structure and Estimation, Modelling Economies in Transition 2006*, (red.: Welfe W, Wdowiński P), Łódź.
- Wróbel-Rotter R. (2007b), *Dynamiczne Stochastyczne Modele Równowagi Ogólnej: zarys metodologii badań empirycznych*, Folia Oeconomica Cracoviensia tom 48.
- Wróbel-Rotter R. (2007c), *Dynamiczny Stochastyczny Model Równowagi Ogólnej: przykład dla gospodarki polskiej*, Przegląd Statystyczny nr 3, tom 54.
- Wróbel-Rotter R. (2008), *Bayesian estimation of a Dynamic General Equilibrium model*, w: Metody Ilościowe w Naukach Ekonomicznych, Ósme Warsztaty Doktorskie z zakresu Ekonometrii i Statystyki, red. A. Welfe, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie.
- Wróbel-Rotter R. (2011a), *Empiryczne modele równowagi ogólnej: gospodarstwa domowe i producent finalny*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, seria Ekonomia, nr 869.
- Wróbel-Rotter R. (2011b), *Obszary stabilności rozwiązywania empirycznych modeli równowagi ogólnej: zastosowanie metod analizy wrażliwości*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, seria Metody analizy danych, nr 873.
- Wróbel-Rotter R. (2011c), *Sektor producentów pośrednich w empirycznym modelu równowagi ogólnej*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, seria Ekonomia, nr 872.
- Wróbel-Rotter R. (2012a), *Analiza stopnia zgodności z danymi empirycznymi estymowanego modelu równowagi ogólnej* rękopis — złożone do druku w ZNUEK, seria Ekonomia.

- Wróbel-Rotter R. (2012b), *Empiryczne modele równowagi ogólnej: zagadnienia numeryczne estymacji bayesowskiej*, ZN UEK Metody analizy danych, 878.
- Wróbel-Rotter R. (2012c), *Empiryczne modele równowagi ogólnej: zastosowanie metody dekompozycji funkcji do oceny zależności między postacią strukturalną i zredukowaną*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, seria Metody Analizy Danych (złożone do druku).
- Wróbel-Rotter R. (2012d), *Estymowane modele równowagi ogólnej i wektorowa autoregresja: model hybrydowy*, rękopis — złożone do druku w Bank i Kredyt.
- Wróbel-Rotter R. (2012e), *Struktura empirycznego modelu równowagi ogólnej dla niejednorodnych gospodarstw domowych*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, seria Ekonomia, 879.
- Wróbel-Rotter R. (2012f), *Wybrane zagadnienia współczesnego modelowania strukturalnego, część I: estymowane modele równowagi ogólnej w zarysie*, Folia Oeconomica Cracoviensia, tom 53.
- Zellner A. (1971), *An introduction to Bayesian inference in econometrics*, Wiley, New York.